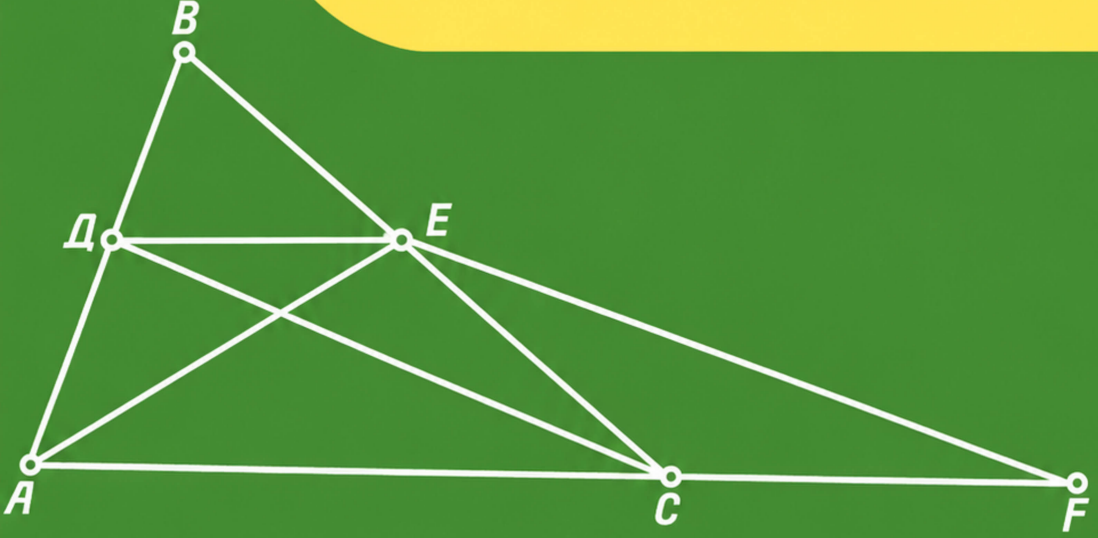
Е.А. БУГУЛОВ и Б.А. ТОЛАСОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

К МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ



ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава первая. Арифметика.

§ 1. Арифметические и логические задачи . . . . . .
§ 2. Элементы теории чисел . . . . . .

Глава вторая. Алгебра.

§ 1. О тождественных преобразованиях . . . . . .
§ 2. О методе полной математической индукции . . . . . .
§ 3. Упражнения на тождественные преобразования . . . . . .
§ 4. Схема Горнера. Нахождение рациональных корней уравнения
§ 5. О решении дробных уравнений . . . . . .
§ 6. О решении иррациональных уравнений . . . . . .
§ 7. О решении систем уравнений . . . . . .
§ 8. Задачи на составление уравнений . . . . . .
§ 9. Квадратные уравнения. Уравнения высших степеней. Дробные уравнения. Иррациональные уравнения в действительной области . . . . . .
§ 10. Системы уравнений . . . . . .
§ 11. Исторические задачи на уравнения и системы уравнений .
§ 12. Логарифмы. Показательные и логарнфмические уравнения .
§ 13. Неопределённые уравнения . . . . . .
§ 14. Доказательство неравенств. Средние величины. . . . . .
§ 15. Задачи на неравенства . . . . . .
§ 16. Прогрессни . . . . . .
§ 17. Элементарные способы нахождения наибольших и наименьших значений функций. . . . . .
§ 18. Задачи на нахождення экстремумов функций . . . . . .
§ 19. Графики функций . . . . . .
§ 20. Комбинаторика . . . . . .

Глава третья. Геометрия.

§ 1. Задачи на доказательство и геометрические места точек . .
§ 2. Задачи на вычисление . . . . . .
§ 3. О геометрических задачах на построение . . . . . .
§ 4. Задачи на построение . . . . . .
§ 5. Стереометрнческие задачи . . . . . .

Глава четвёртая. Тригонометрия.

§ 1. Тождественные преобразования . . . . . .
§ 2. О решении тригонометрических уравнений . . . . . .
§ 3. Уравнення . . . . . .
§ 4. Неравенства . . . . . .
§ 5. Системы уравнений . . . . . .
§ 6. Задачи на нахождение экстремумов . . . . . .
§ 7. Задачи по геометрии с применением тригонометрии . . . .
Ответы . . . . . .

Глава первая

АРИФМЕТИКА

§ 1. Арифметические и логические задачи

1. Требуется между тремя лицами разделить поровну 24 бочонка, из которых 5 полных, 11 полуполных и 8 пустых. (Переливание не допускается).

2. Цена за вход в зоопарк 24 коп. После снижения цен на билеты количество посетителей увеличилось наполовину и сбор увеличился на четверть На сколько снижена цена на билеты?

3. В двух бидонах содержится молоко: в первом в два раза больше, чем во втором; когда из первого отлили 30 литров, а из второго 20 литров, то в первом осталось молока в 3 раза больше, чем во втором. Сколько молока было в каждом бидоне?

4. Мне сейчас вдвое больше лет, чем было тогда, когда мне было столько, сколько вам сейчас. Когда вам будет столько, сколько мне сейчас, то будет нам обоим 63 года. Сколько лет каждому из нас?

5. Отец, когда его спросили о возрасте сына, ответил: если его удвоенный теперешний возраст уменьшить на утроенный возраст, который он имел шесть лет назад, то получится его возраст в настоящее время. Сколько лет сыну?

6. Для нумерации страниц книги потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц заключала в себе эта книга?

7 Двое рабочих кончили вместе работу за 12 часов. Если бы сначала первый сделал половину этой работы, а затем другой — остальную её часть, то они употребили бы вместе 25 часов. За сколько часов каждый отдельно мог бы кончить эту работу?

8. Две колхозницы принесли на рынок вместе 100 яиц; одна больше, чем другая. Продав яйца по разной цене, обе выручили одинаковые суммы. Если бы первая продала столько яиц, сколько вторая. то она выручила бы 3 руб. 60 коп, если бы вторая продала столько яиц, сколько первая, то она выручила бы 1 руб. 60 коп. Сколько яиц было у каждой?

9. Вылетев одновременно, дирижабль и самолёт летят навстречу друг другу. К моменту встречи дирижабль прошёл на 100 *км* меньше самолёта; на место отлёта самолёта он приходит

через 3 часа после встречи. Самолёт прибывает на аэродром дирижабля через 1 час 20 мин. после встречи. Найти расстояние между аэродромами и скорости самолёта и дирижабля.

10. Два самолёта вылетают навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 560 *км*. Через час полёта они встретились и, не останавливаясь, продолжали путь. Первый прибыл в город B на 35 мин. раньше, чем второй прибыл в город A. Найти скорости самолётов.

11. Пароход идёт от Горького до Астрахани 5 суток, от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько времени будет плыть плот по течению реки от Горького до Астрахани?

12. Если от задуманного трёхзначного числа отнять 7, то оно разделится на 7, а если отнять от него 8, то оно разделится на 8, а если от него отнять 9, то оно разделится на 9. Найти это число.

13. Двое часов поставлены в полдень. Первые спешат на 8 минут, вторые отстают на 4 минуты в сутки. Через сколько часов они снова покажут одновременно 12 часов?

14. Отношение стоимости двух монет равно $\frac{1}{3}$. Сколько надо взять тех и других монет, чтобы получить число копеек, равное произведению их стоимостей, причём число всех монет кратно трём?

15. Расшифровать следующее умножение (буквам *a, b* **и** *c* соответствуют различные цифры)

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ \overline{bac} \\ \hline **** \\ **a \\ ***b \\ \hline ****** \end{array}$$

16. Восстановить делимое по следующим следам произведённого деления:

$$**234* : 72 = *0***$$

17. Найти нечётное четырёхзначное число, деление которого на некоторое однозначное число выполняется по схеме

$$\begin{array}{r|l} **** & * \\ * & \overline{***} \\ \hline ** & \\ * & \\ \hline ** & \\ ** & \\ \hline 0 & \end{array}$$

18. Найти $\sqrt{\overline{***5*0}}$, если известно, что подкоренное число точный квадрат, делящийся на 27.

19. Доказать, что числа:

1) $\underbrace{11\ldots1}_{\text{к раз}}0\underbrace{955\ldots5}_{\text{к раз}}61$

2) $\underbrace{44\ldots4}_{\text{к+1 раз}}\underbrace{88\ldots8}_{\text{к раз}}9$

3) $\underbrace{11\ldots1}_{\text{к+1 раз}}\underbrace{55\ldots5}_{\text{к раз}}6$

4) $3\underbrace{99\ldots9}_{\text{к раз}}\underbrace{60\ldots0}_{\text{к раз}}1$

являются точными квадратами.

20. Найти вид квадратов следующих чисел:

1) $\overline{33\ldots3a}$
2) $\overline{66\ldots6a}$
3) $\overline{99\ldots9a}$
4) $\overline{a33\ldots3}$
5) $\overline{a66\ldots6}$
(6 $\overline{a99\ldots9}$

($a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$).

21. Имея два бидона на 4 и 5 литров, можно ли налить из водопроводного крана в ведро 3 литра?

22. В 500 ящиках лежат яблоки. Известно, что ящик может вместить 240 яблок. Доказать, что по крайней мере 3 ящика содержат по одинаковому числу яблок.

23. В ящике лежат 70 шаров: 20 красных, 20 зелёных, 20 жёлтых, 10 чёрных и белых. Шары отличаются друг от друга лишь цветом. В темноте я выбираю шары. Какое наименьшее число шаров я должен взять, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета?

24. Из 80 золотых монет одна фальшивая (более лёгкая). Как найти фальшивую монету посредством четырёх взвешиваний на весах с двумя чашками без гирь?

25. Всем членам одной семьи сейчас 73 года. Состав семьи: муж, жена, дочь и сын. Муж старше жены на 3 года, дочь старше сына на 2 года. Четыре года тому назад всем членам семьи было 58 лет. Сколько лет сейчас каждому члену семьи?

26. Имеется четыре предмета разного веса, а также чашечные весы без гирь. Указать способ, который даёт возможность установить очерёдность весов данных предметов самое большее после пяти взвешиваний.

27. Колода из 12 карточек с номерами от 1 до 12 разбирается так, что каждый раз одна карточка откладывается в сторону,

а следующая переводится вниз под колоду. Как должны быть расположены в колоде карточки, чтобы при указанном способе разбора все они вышли в порядке возрастания их номеров?

28. В одном ящике лежит 50 шариков, в другом 80. По условиям игры каждый из двух игроков по очереди вынимает из какого-либо ящика любое число шариков. Выигравшим считается тот игрок, после хода которого оба ящика окажутся пустыми. Указать план игры, обеспечивающий выигрыш начинающему игроку.

29. В шахматном турнире участвовали ученики IX и X классов. Каждый ученик играл с каждым другим один раз. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько учеников IX класса участвовало в турнире и сколько они набрали очков?

30. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 час. утра. Точно в 8 час. к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 час. и пошел навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на 20 мин. раньше, чем обычно. Определить показание часов в момент встречи инженера с машиной.

31. Доказать, что из всех людей, живших когда-то на свете (и живущих сейчас), число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, есть число чётное.

32. Имеется 10 одинаковых по размеру и виду кубиков. Одни из них алюминиевые (более легкие), другие дюралевые (потяжелее). Определить число кубиков каждого вида с помощью не более шести взвешиваний на чашечных весах.

33. Найти двузначное число n, если известно, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются точными квадратами.

34. Найти три последовательных нечётных числа, сумма квадратов которых выражается четырёхзначным числом, состоящим из одинаковых цифр.

35. Пловец плывет вверх по течению реки. Возле моста А он потерял флягу. Проплыв ещё десять минут против течения, он обнаружил свою потерю, поплыл обратно в догонку за флягой и догнал её возле моста В. Какова скорость течения реки, если расстояние между мостами 1 *км?*

36. Поезд идёт из Москвы в Ленинград. В поезде едут пассажиры Иванов, Петров и Сидоров. В поездной бригаде такие же фамилии у машиниста, кондуктора и кочегара. Известно, что:

1) Пассажир Иванов живёт в Москве.

2) Кондуктор живёт на полпути между Ленинградом и Москвой.

3) Пассажир, однофамилец кондуктора, живёт в Ленинграде.

4) Ближайший сосед кондуктора (пассажир) зарабатывает втрое больше кондуктора.

5) Ставка пассажира Петрова — 200 руб.

6) Сидоров (из бригады) выиграл у кочегара партию в шахматы. Как фамилия машиниста?

37. Из трёх победителей математической олимпиады, набравших одинаковое число очков, надо было выделить самого сообразительного. Для этого поступили так: им показали пять колпаков — 3 белых, 2 серых. Завязав им затем повязками глаза, на голову каждого надели белый колпак. Когда повязки были сняты, было объявлено, что победителем турнира будет первый определивший цвет своего колпака.

Некоторое время соревнующиеся смотрели друг на друга. Наконец, один из них уверенно сказал, что на него надели белый колпак. Как он рассуждал?

• 38. Путешественник попал в один из соседних городов А или В. Ему известно, что жители города А говорят только правду, а жители города В всегда лгут, и что жители А бывают в В и наоборот. Как, задав первому встречному только один вопрос, путешественник может выяснить, в каком городе он находится?

• 39. На острове N с давних времен обосновались рокоманцы из ближайшего континента, воспринявшие все обычаи, язык и культуру местных туземцев. От коренных жителей отличаются пришельцы только тем, что они всегда врут, местные же всегда говорят только правду. Однажды капитан какого-то корабля, приставшего к острову, сошёл на берег и, увидев трёх стариков, спросил первого из них: «Ты рокоманец?» Старик был дряхлый и его ответ капитан не расслышал, поэтому он обратился к двум другим: «Этот старик, кажется, сказал, что он рокоманец?» «Да, он так и сказал»,— ответил второй. «Нет,— он сказал, что он туземец»,—сказал третий. Спрашивается: кем был второй старик и кем был третий?

40. Известны часы начала (но не минуты!) первого, второго, седьмого и восьмого сеансов: 12 ч., 13 ч., 23 ч. и 24 ч. Зная, что продолжительность всех сеансов одинакова, установить начала всех восьми сеансов.

41. В школьном саду квадратной формы пионеры посадили 21 дерево, образовав из них 16 рядов, причём на четырёх сторонах квадрата они разместили по 3 дерева, а в каждом из 12 внутренних рядов — по 5 деревьев. Как они это сделали?

42. Задача современного американского математика Крайчика. Пришли ко мне два друга. Оба отличные шахматисты. После обеда я с каждым из них сыграл по одной партии и обе проиграл, несмотря на то, что имел пешку в качестве «форы». Вошедшая в комнату двенадцатилетняя дочь приветствовала нас и сказала: «Папочка, я стыжусь за тебя. Если позволишь, я сыграю успешнее и без всякой «форы». Я буду играть одновременно на двух досках: с одним партнёром белыми, с другим — чёрными». (Кстати, дочь была едва лишь знакома с правилами движения фигур). К моему восторгу, смешанному с досадой,

она действительно сыграла с лучшим результатом, нежели я. Как она действовала?

43. Найти наименьшее натуральное число, половина которого есть пятая степень.

44. Вырежьте из картона пять одинаковых прямоугольных треугольников так, чтобы у каждого треугольника один катет был вдвое больше другого. Разрежьте один из треугольников на такие две части, чтобы можно было из остальных треугольников и этих частей сложить квадрат.

45. В какой системе счисления даны следующие таблицы сложения и умножения:

$1+1=2$; $1+2=3$; $1+3=4$; $1+4=10$; $2+2=4$;
$2+3=10$; $2+4=11$; $3+3=11$; $3+4=12$; $4+4=13$;
$2\cdot 2=4$; $2\cdot 3=11$; $2\cdot 4=13$; $3\cdot 3=14$; $3\cdot 4=22$; $4\cdot 4=31$;

46. В каких системах счисления выполнены действия:

1)
$$\begin{array}{r} 1\,206 \\ +\ 362 \\ \hline 1\,601 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 2304 \\ -\ 517 \\ \hline 1\,565 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 27 \\ \hline 268 \\ 71 \\ \hline 1\,078 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r|l} 2300 & 43 \\ \cline{2-2} 213 & 32 \\ \cline{1-1} 130 & \\ 130 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Все результаты проверить с помощью обратных действий.

47. Число 138 перевести в пятеричную систему.

48. Число 247_8 перевести в десятичную систему.

49. Число 1024_9 перевести в восьмеричную систему двумя способами.

50. Какое двузначное число, будучи записано в двоичной, четверичной и восьмеричной системах счисления, изображается каждый раз в одних и тех же цифрах (различных счислениях).

51. Задумано число, кратное 3. Если изобразить его в восьмеричной системе и приписать к нему справа 0, то получится четырёхзначное число, сохраняющее прежнее значение если считать, что оно теперь изображено в системе с основанием 4. Найти задуманное число.

52. Найти число, являющееся точным квадратом, если известно, что оно четырёхзначное в пятеричной системе, а если его записать в семеричной системе, то оно выражается одинаковыми цифрами.

53. Показать, что любое целое число можно представить в

виде суммы степеней числа 2; суммы и разности степеней числа 3.

54. Показать, что правило извлечения квадратного корня одинаково во всех системах счисления.

55. Доказать, что во всякой системе счисления и при $a \geqslant 5$ четырёхзначное число $\overline{N=(a-3)(a-3)44}$ является точным квадратом.

56. Задача древнеримского геометра Эпафродита. Найти число всех деревьев, рассаженных на пятифутовом расстоянии друг от друга на прямоугольном участке земли, стороны которого 120 футов и 70 футов. (Обобщить эту задачу для прямоугольника со сторонами a и b).

57. Задача из древнекитайского трактата «Киу-Чанг» (2637 г. до н. э.). В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов.

58. Задача из древнееврейского трактата «Бава-батра» (около IV века до н. э.). Пять дворов расположены один за другим, соединены проходами, но выход в переулок общий. Расходы по содержанию дворов распределены так, что живущие на заднем дворе принимают участие в расходе по всем 5 дворам, живущие в следующем — по четырём дворам и т. д. Наконец, живущие в переднем дворе принимают участие только по этому последнему. Какая часть расходов падает на каждый двор?

59. Задача из сборника «Задачи для изощрения ума» английского учёного Алкуина (735—804). Собака гонится за кроликом, находящимся в 150 футах от неё. Она делает прыжок в 9 футов каждый раз, когда кролик делает прыжок в 7 футов. Сколько прыжков должна сделать собака, чтобы догнать кролика?

60. Задачи из трактата «Чародей-математик» английского математика Д. Валлиса (1616—1703). 1) Даны три сосуда в 3; 5 и 8 единиц объёма. Первые два пустые, а третий полный. Разделить путём переливания содержимое третьего сосуда на две равные части. 2) Существует ли на свете два человека с одинаковым числом волос на голове?

61. Задача французского математика Б. Паскаля (1623—1662). Найти общий признак делимости на произвольное число.

62. Задачи французского математика Б. де Мезириака (1581—1638). 1) Рота пехоты подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан, а брода нет. У берега два мальчика играют в челноке, но таком маленьком, что в нём может переправиться только один взрослый или двое детей. Спрашивается, как с помощью этого челнока может вся рота переправиться на другой берег? 2) Каким наименьшим числом гирь и какого веса можно отвесить на весах любое целое число фунтов от 1 до 40 при условии, что при взвешивании гири можно класть на обе чашки весов?

63. Задача из «Курса математики» французских авторов Ал-

лез, Билли, Пюиссан и Будро (XIX в.). Желая определить среднюю дальность полёта из некоторого артиллерийского орудия, сделали 100 пробных выстрелов и нашли, что

18	выстрелов	дали	дальность	632 *м*,
25	—»—	—»—	—»—	628 *м*,
53	—»—	—»—	—»—	620 *м*,
4	—»—	—»—	—»—	640 *м*.

Какова средняя дальность полёта снаряда?

64. Задача, названная именем французского математика С. Пуассона (1781—1840). Некто имеет 12 пинт вина и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда, один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается: каким образом налить 6 пинт в сосуд в 8 пинт?

65. Задача Л. Ф. Магницкого (1669—1739). Некий человек на вопрос, сколько он имеет денег, ответил: «Аще придастся к моим деньгам толико же, елико имам, и полтолико, и $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3}$, и убавится из всего 41 рублёв, и тогда будет у меня 100 рублёв, и ведательно есть, колико той человек имяше денег».

66. Осетинская народная задача. Три брата косили сено на трёх участках. Старший брат, выйдя на работу раньше других, захватил третью часть имевшихся у них яблок. Второй брат, не зная, что старший уже взял свою долю, забрал треть остатка и, наконец, проспавший третий брат — треть второго остатка. Собравшись после работы, братья заметили, что оставшиеся яблоки они могут поделить поровну, не разрезая их. Сколько было у братьев всего яблок?

§ 2. Элементы теории чисел

1. Если остаток от деления некоторого целого числа на 9 есть одно из чисел 2, 3, 5, 6 и 8, то это число не может быть точным квадратом. Доказать.

2. Доказать, что если даны два числа a и b, из которых второе делится на 3, и если их приближённое частное, вычисленное с точностью до 0,01, равно точному частному, то и a делится на 3. (Показать, что вместо 3 можно взять любое число, взаимно простое с 10).

3. Доказать, что число

$$70a + 21b + 15c - N$$

делится на 105, если a, b и c — остатки от деления целого числа N соответственно на 3, 5 и 7.

Доказать, что дроби

$$\frac{2n+1}{2n(n+1)} \quad \text{и} \quad \frac{14n+3}{21n+4}$$

при любом натуральном n несократимы.

5. Доказать, что дробь

$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

несократима, если a и b — взаимно простые числа.

6. Дана несократимая дробь

$$m=\frac{n+17}{n-4}, \quad \text{где } n \text{ — целое число.}$$

1) Определить значение n, при котором данная дробь будет иметь приближённое значение с точностью до 0,01 по недостатку, равное 8,47;

2) Если дробь сократима, то какие значения может иметь наибольший общий делитель числителя и знаменателя?

3) Найти значение n, при котором дробь m равна квадрату некоторой несократимой дроби $\frac{a}{b}$.

7. Дана дробь $\frac{a}{b}$. Какому условию должна удовлетворять дробь $\frac{m}{n}$, чтобы было:

$$\frac{a+m}{b+n}=\frac{m}{n}?$$

8. Дана несократимая дробь $\frac{a}{b}>1$.

1) Будут ли несократимыми дроби $\frac{a-b}{a}$ и $\frac{a+b}{b}$?

2) Будет ли несократимой дробь $m=\frac{a-b}{a}\cdot\frac{a+b}{b}$?

3) Может ли дробь m быть выражена точной десятичной дробью?

9. Найти дробь, равную $\frac{399}{1064}$, зная, что сумма её компонентов составляет куб простого числа.

10. Доказать, что при любом натуральном n дробь

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

обращается в смешанную периодическую десятичную дробь.

11. Доказать, что при делении двух чисел на их разность получаются равные остатки, а частные отличаются на 1.

12. Доказать, что если a и b — целые числа и a^2+b^2 делится на 7, то каждое из чисел a и b делится на 7.

13. Показать, что всякое чётное число можно представить как разность произведений двух пар последовательных чисел.

14. Показать, что всякое нечётное число и половина следующего за ним числа взаимно просты.

15. Найти число, кратное 2, 3, 7, и имеющее 42 делителя.

16. Найти число, зная, что оно имеет нечётное число делителей и при делении на 39 даёт в частном простое число, а в остатке 1.

17. Доказать, что если чётное число есть сумма двух квадратов, то и половина его есть сумма двух квадратов.

18. Доказать, что если

$$x^2+y^2=z^2,$$

то xyz делится на 60.

19. Доказать, что выражение $ab(a^4-b^4)$ при любых нечётных значениях a и b делится на 240.

20. Доказать, что при любом натуральном n:

1) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11;

2) $10^n+18n-28$ делится на 27;

3) $9^{n+}-8n-9$ делится на 64;

4) $5\cdot 49^{n+1}+8^n$ делится на 41;

5) $49^n-48n-1$ делится на 2304;

6) $3^{2n+1}\cdot 5^n-3^{n+1}\cdot 2^n$ делится на 117;

7) $11^{6n+3}+1$ делится на 148;

8) $2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4$ делится на 25;

9) $\dfrac{n^5-5n^3+4n}{n+2}$ делится на 24;

10) n^2+1 не делится на 9.

21. Показать, что $7^{40}-1$ делится на 3300.

22. Показать, что выражение $1+2^n+4^n$ делится на 7, если $n=3\kappa\pm 1$.

23. Показать, что выражение:

$$625^{2a+1} + 4 \cdot 125^{2a+1} + 6 \cdot 25^{2a+1} + 4 \cdot 5^{2a+1} + 1$$

делится на 1296, если a — натуральное число.

24. Доказать, что при любом целом n выражение

$$n^7 - 14n^5 - 49n^3 - 36n$$

делится на 5040.

25. Показать, что если a — нечётное число, не делящееся на 3 и 5, то выражение

$$(a^2 - 1)(a^4 - 16) \cdot [a^2 - (2a + 1)^2]^2$$

делится на 23 040.

26. При каких значениях n числа:

$$N = 20^n + 16^n - 3^n - 1$$

делятся на 323?

27. Доказать, что выражение:

$$2(a - 1)^{n+1} - (2 - a)^n$$

делится на $2a - 3$.

28. Доказать, что если целое число, являющееся точным квадратом, содержит нечётное число десятков, то последняя его цифра есть 6.

29. Доказать, что у любого точного квадрата произведение двух последних цифр чётно.

30. Из цифр трёхзначного числа N составляются два новых числа M и m — самое большое и самое малое среди чисел, составленных из тех же цифр, что и N; далее составляется разность $N_1 = M - m$, и с числом N_1 поступают так же, как ранее с числом N. Доказать, что, повторив некоторое число раз этот процесс, мы обязательно придём к числу 495. Каково наименьшее число k такое, что k — кратное повторение описанного процесса обязательно приводит к числу 495.

31. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

32. Доказать, что неделимость целого числа n на 2 и 3 есть необходимое и достаточное условие делимости числа $4n^2 + 3n + 5$ на 6.

33. Доказать, что если из любого трёхзначного числа $\overline{abc}$ $(a \geqslant c + 2)$ вычесть число $\overline{cba}$ и к полученному числу прибавить число, составленное из его же цифр, но взятых в обратном порядке, то в сумме получится 1089.

Например. Если $\overline{abc} = 542$, то имеем: $542 - 245 = 297$; $297 + 792 = 1089$.

34. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных чисел не может быть точным квадратом.

35. Доказать, что если m — натуральное число, то разность между суммой цифр m-ой степени целого числа и m-ой степенью суммы цифр того же числа делится на 9.
(Пример. Если $m=3$, то для числа 17 имеем: $17^3=4913$, $4+9+1+3=17$; $8^3=512$; $17-512=-495$ — делится на 9).

36. Найти два числа, зная их наименьшее общее кратное 1620 и частное 0,75.

37. Найти дробь со знаменателем 241, зная, что её квадратный корень с точностью до 0,01 по недостатку равен 0,87.

38. Найти натуральные числа N, обладающие тем свойством, что сумма цифр чисел N^k равна N ($k=2, 3, 4$).

39. Доказать, что частное от деления $2^{p-1}-1$ на p есть точный квадрат при p простом только в случаях $p=3; 7$.

40. Доказать, что сумма цифр всех чисел от 1 до 10^n имеет вид $9k+1$

41. При каком наименьшем n для k-го простого числа имеет место неравенство: $p_k^n > p_{k+1}$, если известно, что между p_k и $2p_k$ всегда имеется простое число?

42. Доказать, что если $ad-bc=\pm 1$, то при любом x числа $ax+b$ и $cx+d$ взаимно просты.

43. Найти сумму ряда:

$$a+\overline{aa}+\overline{aaa}+\cdots+\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{n\text{ раз}}$$

44. Из таблицы

1	2	3	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$3n$
$3n+1$	$3n+2$	$3n+3$	$4n$
. . . . .			
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$	$(n-1)n+3$	n^2

выбраны n чисел так, что никакие два из выбранных чисел не стоят в одной и той же строке или в одном и том столбце таблицы. Какова сумма выбранных чисел?

45. Расположенная внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ точка O соединена со всеми вершинами. Стороны n-угольника произвольным образом нумеруются числами от 1 до n и независимо от этого n отрезков OA_1, OA_2,... OA_n нумеруются теми же числами, причём никакие две стороны или два отрезка не получают одинаковых номеров.

а) при $n=9$ указать такую нумерацию сторон и отрезков,

при которой сумма номеров сторон любого из треугольников $OA_{к-1}A_к$ будет одна и та же;

б) доказать, что при $n = 10$ такую нумерацию осуществить нельзя.

46. В числовом треугольнике

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & & \\
 & 1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 21 & 50 & 90 & 126 & 141 & 126 & 90 & 50 & 21 & 6 & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

каждое число равно сумме трёх чисел, стоящих в предыдущей строке над ним, справа от него и слева от него. Каковы номера тех строк этого треугольника, в которых ни одно число не делится на 3? А на 5? А на 7?

47. Выписаны подряд все числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117,...

и для каждого из этих чисел находится сумма его цифр:

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, 9,...

Требуется указать закон, описывающий чередование чисел последней последовательности.

На каком месте этой последовательности впервые появится число 81 и каково будет следующее за ним число? Что раньше встретится в этой последовательности — 4 раза подряд число 27 или 3 раза подряд число 36?

48. Зная, что $2^n - 1 = ab$, где n, a и b — целые числа, бо́льшие единицы, доказать, что $a + 1$ и $b - 1$ суть чётные, кратные одной и той же степени 2.

Аналогичный вопрос о числах $p - 1$ и $q - 1$ при условии

$$2^n + 1 = p \cdot q.$$

49. Доказать, что если $8n + 1$ и $24n + 1$ — полные квадраты, то $8n + 3$ при $n > 1$ — составное число.

50. Если p и $8p^2 + 1$ — простые, то доказать, что $8p^2 - p + 2$ также простое число.

51. Доказать, что если n — нечётное число, некратное 3, то $N = 16^n - 4^n + 1$ при $n > 1$ не может быть простым.

52. Доказать, что квадрат всякого простого числа, большего 5, даёт при делении на 30 остаток 1 или остаток 19.

53. Доказать, что если $a^2 - 4b$, где a и b — целые отличные от нуля числа, является полным квадратом, то $a^3 - 3ab$ не может быть полным кубом.

54. Доказать, что произведение наибольшего общего делителя двух чисел на их наименьшее общее кратное равно произведению данных чисел.

55. Определить два числа, зная их общее наименование кратное 360 и сумму квадратов 5 409.

56. Найти два треугольных числа, сумма которых — треугольное число.

(Треугольными называются числа вида $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Последовательность их такова: 1, 3, 6, 10, 15, ...; n-ое треугольное число есть сумма первых n натуральных чисел).

57. Показать, что при $1 < k < p$ и p — простом числа C_p^k кратны p.

58. Может ли точный корень 17-ой степени из двадцатитрёхзначного числа оканчивается на 5?

59. Один из математиков — горячий болельщик футбольной команды своего города. Однажды, после одного из удачных матчей восторженный математик пожелал пожать руки всем игрокам любимой им команды. Но тренер команды, сам любитель математики, поставил ему условие:

„Нас 12 человек. Мы стоим по кругу. Начните с меня и, пропуская одно и то же число футболистов, пожмите руки всем". Математик, подумав немного, выполнил требование тренера и, в свою очередь, предложил футболистам следующую задачу:

Точки окружности A_1, A_2, ... , A_n соединены хордами, начиная с A_1. Сколько проведено хорд, если точки соединены через каждые k? В каком случае число хорд равно n? Может ли число хорд быть больше n? Найдите решения этих задач.

60. Задача из трактата арабского математика Табит ибн-Курра (836—901). Если числа $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ — простые, то показать, что числа $a = 2^n \cdot pq$ и $b = 2^n \cdot r$ будут дружественными. Применить к частному случаю $n = 2$.

Примечание. Два числа называются дружественными, если сумма всех делителей каждого из них равна сумме самих чисел. Например, 220 и 284; 17 296 и 18 416; 9 363 584 и 9 437 056. Эйлером было найдено 64 пары дружественных чисел. Среди них имеются и нечётные.

61. Задача французского математика Ш. Бувелля (конец XV и начало XVI века). Показать, что всякое совершенное число, кроме 6, имеет вид $c = 9k + 1$.

Примечание. Число c называется совершенным, если сумма всех его делителей вдвое больше самого числа. Первые четыре совершенных числа: 6, 28, 496, 8 128. Формула совершенных чисел: $c = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где $2^p - 1$ простое число, получена Евклидом. Уже известно 18 совершенных чисел. Последнее из них: $2^{33216} \cdot (2^{33217} - 1)$ найдено в 1957 г. Ризелем и содержит 2 000 цифр. Нечётных совершенных чисел пока ие найдено и даже ие доказано их существование.

62. Задача из трактата „Та́йны чисел" Бунгуса (XVI век). Всякое простое число, кроме 2 и 3, имеет форму $p = 6\kappa \pm 1$. Доказать.

63. Задача знаменитого французского математика П. Ферма́ (1601 — 1665), юриста по профессии. Доказать, что если целое число N не делится на простое число p, то $N^{p-1} - 1$ кратно p.

Примечание. Эта теорема, играющая важную роль в теории чисел, называется „малой теоремой" Ферма́ в отличие от великой теоремы" о том, что при $n > 2$ неопределенное уравнение $x^n + y^n = z^n$ в целых числах не разрешимо. „Великая теорема" Ферма́ (проблема Ферма́ до сих пор полностью не доказана.

64. Задачи выдающегося немецкого математика Г. Лейбница (1646 — 1716). 1). Доказать, что $m^5 - m$ делится на 5; 2). Доказать, что $m^7 - m$ делится на 7.

Показать, что эти задачи являются частными случаями задачи Ферма́. (Лейбниц наравне с Ньютоном считается основателем анализа бесконечно малых).

65. Задачи выдающегося немецкого математика И. Ламберта (1728 — 1777). 1). Показать, что всякий нечётный квадрат, уменьшённый на 1, всегда делится на 8; 2). Показать, что любой нечётный квадрат (некратный 9), уменьшённый на 1, даёт результат, кратный 24.

66. Задача великого французского математика О. Коши́ (1789 — 1857). Доказать, что если перемножить два целых числа, каждое из которых есть сумма двух квадратов, то полученное произведение будет также суммой двух квадратов.

Глава вторая

АЛГЕБРА

§ 1. О тождественных преобразованиях

а). В математике часто приходится заменять функции тождественными им выражениями, т. е. такими выражениями, которые при одной и той же системе числовых значений аргу-

ментов принимают такие же значения, что и заменяемые ими функции. Замена одного выражения другим, тождественным ему выражением, называется тождественным преобразованием этого выражения. В частности, примерами тождественных преобразований служат все формулы: $(a+в)^2 = a^2 + 2ав + в^2$, $(a-в)(a+в) = a^2 - в^2$ и т. д. Тождественные выражения отличаются только внешне, различными формами записи одной и той же изображаемой ими функции.

б). **Тождественность двух многочленов**[1]. Два многочлена тождественны тогда, и только тогда, когда у них равны коэффициенты членов, содержащих одни и те же аргументы в одинаковых степенях, т. е. равны коэффициенты подобных членов.

Из приведённой теоремы вытекает единственность канонического представления каждого многочлена.

в). **Метод неопределённых коэффициентов.** Одним из наиболее распространённых методов тождественных преобразований функций является метод неопределённых коэффициентов. Он применяется в тех случаях, когда после выполненных преобразований должно получиться выражение определённого вида или структуры. Коэффициенты этого нового вида данной функции определяют на основании теоремы предыдущего пункта в). т. е. приравнивая коэффициенты подобных членов. Уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов можно получить, приравнивая значения обоих выражений (данного и преобразованного) при одинаковых значениях аргументов.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Многочлен $M = x^3 - 7x^2 + 2$ представить в виде суммы степеней двучлена $x+1$. Пусть $M = (x+1)^3 + a(x+1)^2 + в(x+1) + c$. Тогда сопоставлением коэффициентов при x^2, x и x^0 получим:

$$a + 3 = -7;\ 2a + в + 3 = 0;\ a + в + c + 1 = 2.$$

Отсюда получим:

$$x^3 - 7x^2 + 2 = (x+1)^3 - 10(x+1)^2 + 17(x+1) - 6.$$

Примечание. Коэффициенты a, $в$, и c можно было бы найти, придавая x некоторые небольшие значения в обоих представлениях многочлена и приравнивая каждый раз соответствующие значения самих многочленов. Так, например, при $x = -1;\ 0;\ 1$ получим: $c = -6;\ 1 + a + в + c = 2;\ 8 + 4a + 2в + c = -4$. Откуда найдём те же значения a, $в$ и c.

2. Разложить на множители многочлен $M = a^3 + в^3 + c^3 -$

[1]. Предполагается, что многочлены заданы в каноническом виде, т. е. представляют собой суммы попарно неподобных одночленов.

$-3abc$. Многочлен M симметричен[1] относительно a, b и c. Если поочерёдно одну из букв считать аргументом, а две другие буквы — временно—параметрами (произвольными постоянными), то легко заметить, в частности, что $a=-(b+c)$ — есть корень уравнения: $a^3-3bc\cdot a+b^3+c^3=0$. Поэтому по теореме Безу заключаем, что M делится на $a+b+c$:

$$M=(a+b+c)\cdot[m(a^2+b^2+c^2)+n\cdot(ab+bc+ca)].$$

Приравнивая коэффициенты при a^3, а потом при abc, получим: $m=1$; $n=-1$. Разложение таково:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Как следствие, отсюда при $a+b+c=0$ вытекает тождество:

$$a^3+b^3+c^3=3abc,$$

которое находит применение также при разложении многочленов на множители (примеры см. ниже).

Многочлен:

$$M=(x-y)\cdot(x+y)^4+(y-z)(y+z)^4+(z-x)(z+x)^4$$

при $x=y$, $y=z$ и $z=x$ обращается в нуль, поэтому его разложение имеет вид:

$$M=(x-y)(y-z)(z-x)\cdot[m(x^2+y^2+z^2)+n(xy+yz+zx)]$$

Найти m и n.

3. Метод неопределённых коэффициентов находит большое применение при решении уравнений высших степеней, которые, как правило, в общем случае решаются разложением левой части на множители.

Пример. Решить уравнение:

$$x^4-6x^2-15\cdot x-4=0.$$

Решение. Представляем уравнение в виде:

$$(x^2+ax+b)(x^2+a_1x+b_1)=0.$$

и сопоставляем коэффициенты:

---

[1]. Многочлен называется симметрическим, если он не изменяется при любой перестановке аргументов.

$$\begin{aligned} a + a_1 &= 0, \\ aa_1 + в + в_1 &= -6, \\ aв_1 + a_1в &= -15, \\ вв_1 &= -4. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим: $a = -3$, $в = -1$, $a_1 = 3$, $в_1 = 4$. Данное уравнение сведено к двум квадратным уравнениям:

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \text{ и } x^2 + 3x + 4 = 0,$$

решив которые, найдем корни исходного уравнения.

4. Вывести формулу для $(x + y + z)^3$, зная, что разложение этой степени на сумму одночленов, ввиду ее симметричности, имеет вид:

$$a(x^3 + y^3 + z^3) + в(x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2) + c \cdot xyz$$

5. Представить разложение многочлена $(x + y + z)^3$ в виде:

$$a(x + y)^3 + в(x + y)^2 \cdot z + c(x + y)z^2 + a_1(y + z)^3 +$$

$$+ в_1(y + z)^2 \cdot x + c_1(y + z) \cdot x^2 + a_2(z + x)^3 + в_2(z + x)^2 \cdot y +$$

$$+ c_2(z + x) \cdot y^2.$$

6. Дробь:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$$

можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{в}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1}.$$

Пользуясь тождественным равенством:

$$x^2 + 5x + 6 \equiv a(x + 1)(x^2 + x + 1) + в(x^3 - 1) + (cx + d)(x^2 - 1)$$

найти числа a, $в$, c и d.

§ 2. О методе математической индукции

а) Переход от частных утверждений к общим называется индукцией. Переход от общих утверждений к частным называется дедукцией.

Переход от частных утверждений к общим не всегда при-

водит к истинному утверждению. Например, из того, что все чётные числа, оканчивающиеся на 2, не делятся на 5, не следует, что все чётные числа не делятся на 5. Приведём ещё такой пример. Великий французский математик Ферма́ на основании первых четырёх чисел вида $2^{2^n}+1$, являющихся простыми ($n=1; 2; 3; 4$), заключил, что все числа этого вида — простые. Ошибочность этого утверждения впервые обнаружил Эйлер[1], указав делитель 641 числа $2^{32}+1$. В данном случае Ферма́ воспользовался неполной индукцией. Примеров ложных выводов, являющихся следствием рассуждения, основанного на неполной индукции, можно было бы привести много. Неполная индукция не является методом строгого научного рассуждения, потому что при неполной индукции заключение делается, исходя только из нескольких первых частных случаев. Закономерность, усмотренная для нескольких первых частных случаев, для всех остальных возможных случаев не обязательно может иметь место. Поэтому все закономерности, выведенные из частных случаев, необходимо строго доказать (или опровергнуть в случае их ложности). Это делается с помощью метода математической индукции.

б) Полная математическая индукция позволяет кратко и исчерпывающим образом доказать утверждение простым переходом от n к $n+1$. Заменяет необходимость непосредственной проверки утверждение на частных случаях, число которых исчерпать практически невозможно.

Метод полной математической индукции основан на следующем принципе математической индукции:

Если некоторое утверждение верно для натурального числа $n=1$ и если из предложения справедливости этого утверждения для какого-нибудь натурального числа $n=k$ вытекает его справедливость для следующего натурального числа $n=k+1$, то оно верно для любого натурального числа n.

Ход индуктивиого доказательства таков:

1) устанавливается (путем непосредственной проверки) справедливость замеченной закономерности для натурального числа $n=1$;

2) допускается справедливость этой закономерности для некоторого натурального числа $n=k$;

3) доказывается справедливость закономерности для $n=k+1$ на основе сделанного для $n=k$ допущения.

---

[1] К началу 1957 г. было найдено 28 составных чисел вида $2^{2^n}+1$. А именно, для n = 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 18, 23, 26, 38, 39, 55, 63, 73, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 268, 284, 316, 452. Наибольшее из этих чисел имеет не менее 10^{185} цифр, а одии из его делителей равен $27\cdot 2^{455}+1$ и выражается 139-значным числом.

В строгом доказательстве обязательно должны быть все эти три этапа.

Часто доказываемое утверждение бывает верно лишь, начиная с некоторого натурального числа, бо́льшего единицы. Тогда в п. 1) вместо $n=1$ берется то наименьшее число e, начиная с которого утверждается справедливость данной закономерности. Так, например, при доказательстве неравенства Бернулли[1] наименьшее значение n равно 2 ($e=2$).

Метод полной математической индукции применяется почти во всех областях математики, поэтому овладеть этим методом крайне необходимо любому, кто интересуется математикой или желает стать математиком по профессии — педагогом или научным работником.

Рассмотрим несколько примеров на применение метода полной математической индукции.

1. Доказать формулу общего члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(a_1 — первый член, d — разность прогрессии, n — номер члена).

Доказательство. 1) При $n=1$ формула верна:

$$a_1 = a_1 + d(1-1).$$

2) Допустим справедливость формулы для $n=\kappa$:

$$a_\kappa = a_1 + d(\kappa-1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

3) Рассмотрим $a_{\kappa+1}$.

По определению арифметической прогрессии имеем:

$$a_{\kappa+1} = a_\kappa + d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Учтём принятое равенство (2):

$$a_{\kappa+1} = [a_1 + d(\kappa-1)] + d;$$

Отсюда получаем:

$$a_{\kappa+1} = a_1 + d\cdot\kappa = a_1 + d[(\kappa+1)-1] \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Равенство (4) составлено по такому же закону, что и равенство (2). Справедливость формулы (1) доказана.

---

[1] См. п. 6 § 14.

Доказать, что произведение:

$$П_n = (a_1^2 + в_1^2 + c_1^2 - a_1в_1 - в_1c_1 - c_1a_1)(a_2^2 + в_2^2 + c_2^2 - a_2в_2 -$$

$$b_2c_2 - c_2a_2)\cdots(a_n^2 + в_n^2 + c_n^2 - a_n\cdot в_n - в_nc_n - c_n\cdot a_n)$$

можно представить в таком же виде, как каждое из его сомножителей:

$$П_n = a^2 + в^2 + c^2 - aв - вc - ca) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Доказательство. 1). Наименьшее значение n равно 2, поэтому сначала установим справедливость равенства (1), при $n = 2$:

$$П_2 = (a_1^2 + в_1^2 + c_1^2 - a_1в_1 - в_1c_1 - c_1a_1)\cdot(a_2^2 + в_2^2 + c_2^2 - a_2в_2 -$$

$$- в_2c_2 - c_2a_2) = A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

В левой части (2) первый сомножитель симметричен относительно переменных a_1, $в_1$ и c_1, а второй — относительно a_2, $в_2$ и c_2. Это наводит на мысль, что и правая часть этого равенства должна быть симметрична относительно некоторых выражений, составленных из a_1, $в_1$, c_1, и a_2, $в_2$ и c_2 по закону симметричности. Учитывая ещё, что произведение в левой части (2) даёт однородный многочлен[1] четвёртой степени, мы можем считать A, B и C однородными и симметричными многочленами относительно всех 6 аргументов левой части. Легко видеть, что есть только одна возможность для переменных A, B и C:

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1\cdot a_2 + в_1\cdot в_2 + c_1\cdot c_2;\\ B &= a_1\cdot в_2 + в_1\cdot c_2 + c_1\cdot a_2;\\ C &= a_1\cdot c_2 + в_1\cdot a_2 + c_1\cdot в_2; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Введём обозначения:

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= к,\\ AB + BC + CA &= e. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + в_1 + c_1 &= m_1,\\ a_2 + в_2 + c_2 &= m_2,\\ a_1в_1 + в_1c_1 + c_1a_1 &= n_1,\\ a_2в_2 + в_2c_2 + c_2a_2 &= n_2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

---

[1]. Однородным называется такой многочлен, у которого все члены имеют одну и ту же степень.

Тогда равенство (2) перепишется так:

$$(m_1^2 - 3n_1)\cdot(m_2^2 - 3n_2)=\kappa^2 - 3e \quad \cdots\cdots\cdots (2^1)$$

Далее из равенства (3) получаем:

$$\text{или} \quad \begin{matrix} \kappa = A+B+C=m_1 . m_2 \\ \kappa^2 = m_1^2 \cdot m_2^2 \end{matrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

Раскроем скобки в равенстве (2) и учтём равенство (5):

$$l^2 = m_1^2\, n_2 + m_2^2 \cdot n_1 - 3n_1 \cdot n_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

На основании равенств (4) легко показать справедливость равенства (2^1) и вместе с ним исходного равенства. (Выкладки проделать самим).

2). Допустим, что доказываемое равенство верно при $n=\kappa$:

$$П_\kappa = A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

3). Рассмотрим теперь произведеиие $П_{\kappa+1}$.

Согласно допущению мы можем написать, что

$$П_{\kappa+1} = П_\kappa \cdot (a^2_{\kappa+1} + в^2_{\kappa+1} + c^2_{\kappa+1} - a_{\kappa+1}\cdot в_{\kappa+1} - в_{\kappa+1}\cdot c_{\kappa+1} - c_{\kappa+1}\cdot$$

$$\cdot a_{\kappa+1}) = (A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)\cdot(a^2_{\kappa+1} + в^2_{\kappa+1} + c^2_{\kappa+1} -$$

$$- a_{\kappa+1}\cdot в_{\kappa+1} - в_{\kappa+1}\cdot c_{\kappa+1} - c_{\kappa+1}\cdot a_{\kappa+1}) \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

Здесь мы имеем опять произведение двух сомножителей, относительно которого в п. 1). уже установлено, что оно представляется в таком же виде, как каждый из его сомиожителей. Поэтому окончательно получаем:

$$П_{\kappa+1} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha,$$

где:

$$\alpha = A\cdot a_{\kappa+1} + B\cdot в_{\kappa+1} + C\cdot c_{\kappa+1},$$

$$\beta = A\cdot в_{\kappa+1} + B\cdot c_{\kappa+1} + C\cdot a_{\kappa+1},$$

$$\gamma = A\cdot c_{\kappa+1} + B\cdot a_{\kappa+1} + C\cdot в_{\kappa+1}.$$

Равенство (1) доказано для любого натурального n.

3. Опираясь на тождество:

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A + B + C)\cdot(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA),$$

докажите справедливость равенства:

$$(a_1^3 + в_1^3 + c_1^3 - 3a_1в_1c_1)\cdot(a_2^3 + в_2^3 + c_2^3 - 3a_2в_2c_2)\cdots(a_n^3 + в_n^3 + c_n^3 - 3a_nв_nc_n) = a^3 + в^3 + c^3 - 3авс.$$

4. Докажите формулу Моавра:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

5. Найти сумму:

$$S_n = \frac{1}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{ab}{(a^2+b^2)(a^3+b^3)} + \frac{a^2b^2}{(a^3+b^3)(a^4+b^4)} + \cdots + \frac{a^{n-1}\cdot b^{n-1}}{(a^n+b^n)\cdot(a^{n+1}+b^{n+1})} \cdots \quad (1)$$

Решение. Непосредственно имеем:

$$S_1 = \frac{a-b}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)},$$

$$S_2 = \frac{a^2-b^2}{(a^2-b^2)(a^3+b^3)},$$

$$S_3 = \frac{a^3-b^3}{(a^2-b^2)(a^4+b^4)},$$

$$S_4 = \frac{a^4-b^4}{(a^2-b^2)(a^5+b^5)}.$$

Из этих частных случаев мы усматриваем закономерность, согласно которой можно предположить, что

$$S_n = \frac{a^n - b^n}{(a^2-b^2)\cdot(a^{n+1}+b^{n+1})} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

Докажем справедливость формулы (2).

1). Для $n = 1$ формула (2) верна:

$$S_1 = \frac{1}{(a+b)(a^2+b^2)} = \frac{a-b}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}.$$

2). Допустим, что формула (2) верна для некоторого натурального $n = k$, т. е. примем равенство:

$$S_k = \frac{a^k - b^k}{(a^2-b^2)\cdot(a^{k+1}+b^{k+1})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

3). Опираясь на сделанное допущение, рассмотрим сумму S_{k+1}:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{a^k b^k}{(a^{k+1}+b^{k+1})(a^{k+2}+b^{k+2})} =$$

$$= \frac{a^k - b^k}{(a^2-b^2)(a^{k+1}+b^{k+1})} + \frac{a^k b^k}{(a^{k+1}+b^{k+1})\cdot(a^{k+2}+b^{k+2})}.$$

После преобразований получим:

$$S_{k+1} = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{(a^2-b^2)(a^{k+2}+b^{k+2})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Доказали, что формула (2) верна и для $n = k+1$. Отсюда следует справедливость формулы (2) для любого натурального n.

• 6. Доказать, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$ (n – любое натуральное число).

Доказательство.

1). Для $n = 1$ теорема верна.

2). Допустим, что теорема справедлива для некоторого натурального $n = k$, т. е. $a^k - b^k$ делится на $a - b$.

3). Рассмотрим $a^{k+1} - b^{k+1}$

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - a^k b + a^k b - b^{k+1} =$$

$$= a^k \cdot (a-b) + b \cdot (a^k - b^k).$$

Здесь первое слагаемое содержит множитель $a - b$, а во втором слагаемом есть множитель, который делится на $a - в$ по допущению. Отсюда следует, что теорема имеет место и для $n = k+1$. Следовательно, она верна для любого натурального n.

§ 3. Упражнения на тождественные преобразования.

Упростить выражения (1 — 24).

1. $(x+a)(x^2+a^2)\cdot(x^4+a^4)(x^8+a^8)\cdots(x^{2^n}+a^{2^n})$

2. $(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\cdots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^n-1}+a^{2^n})$

3. $b\sqrt{2}\cdot\dfrac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}-\sqrt{(a+b)^3}+\sqrt{(a-b)^3}$

4. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

5. $\dfrac{(1+\sqrt{a})^5+(1-\sqrt{a})^5-2(a\sqrt{5}-1)^2}{4a^2}$. Вычислить при $a=5-\sqrt{5}$.

6. $\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}+\dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

7. $(a+a^2+\cdots+a^m):\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}+\cdots+\dfrac{1}{a^m}\right)$

8. $\left(\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}\right)\cdot$ при $a+b+c=0$

9. $\dfrac{1}{(a+b)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)+\dfrac{3}{(a+b)^4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+$

$+\dfrac{6}{(a+b)^5}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\cdot$

10. $\left(\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2-3yz}{y+z}\right)\cdot\frac{2(xy+xz)}{x+y+z}+(x+y+z)^2$.

11. $ab(a+b)+bc(b-c)-ca(c+a)$.

12. $\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}$.

13. $\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-z)(y-x)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}$

14. $\frac{a-b}{(c+a)(c+b)}+\frac{b-c}{(a+b)(a+c)}+\frac{c-a}{(b+c)(b+a)}$.

15. $\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(b-a)}$.

16. $\left(\frac{a+\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}-\sqrt[4]{ab}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)$.

17. $(x-a)(x-b)(a-b)+(x-b)(x-c)(b-c)+$
$+(x-c)(x-a)(c-a)$.

18 $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b-c)^3$

19. $(a+b+c-d)^2+(a+b-c+d)^2+(a-b+c+d)^2+$
$+(-a+b+c+d)^2$.

20. $\frac{x^2+x\sqrt{1+x^2}+2+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{1+x^2}+2-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2x^2+2}+x}{\sqrt{2x^2+2}-x}$.

21. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

22. $\sqrt[3]{3+9\sqrt[3]{12}-9\sqrt[3]{18}}$.

23. $\sqrt{3{,}75+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}}$

24. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

25. Доказать, что выражение:

$$a^{9991}+a^{338}+1 \text{ делится на } a^2+a+1.$$

26. Показать, что $(a+1)^{2n+1}+a^{n+2}$ делится на a^2+a+1.

27. Доказать, что выражение

$$a^{m(a+1)}-a(a^m-1)-1^m \text{ делится на } (a^m-1)^2.$$

28. Показать, что выражение $n^{n-1}-1$ делится на $(n-1)^2$ при любых натуральных n, бóльших 1.

29. Доказать, что многочлен

$$x^{n+2}-(n+2)\cdot x+n+1$$

делится на $(x-1)^2$. Найти частное.

30. Показать, что a^a-a^2+a-1 делится на $(a-1)^2$ при любых натуральных a, бóльших 1.

31. Доказать тождество:

$$27a^2b^2\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3=\left[\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3-(a^2+b^2)\right]^3.$$

32. Вывести формулы:

1). $$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

2). $$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

(Эти формулы применяются, если a^2-b — точный квадрат).

33). Вывести формулы:

1). $$\sqrt{a+b\cdot i}=\pm\left[\sqrt{\frac{r+a}{2}}+i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right],$$

2). $\sqrt{a-b\cdot i}=\pm\left[\sqrt{\frac{r+a}{2}}-i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right]$.

($r=+\sqrt{a^2+b^2}$ — модуль комплексных чисел $a\pm bi$)

34. Показать, что если

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$$

35. Показать, что если

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0,$$

то

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

36. Доказать, что если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n},$$

то

$$\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}=$$
$$=\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}.$$

37. Доказать, что если

$$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}=\frac{v}{u},$$

то

$$(a+b)^n cd^{n-4}\cdot nqu=(c+d)^n ab^{n-4}\cdot mpv.$$

38. Доказать, что выражение:

$$(x+y)^n-(x^n+y^n)$$

при $n = 6k - 1$ делится на $x^2 + xy + y^2$, а

при $n = 6k + 1$ делится на $(x^2 + xy + y^2)^2$.

39. Показать, что при $m^2 + m + 1 = 0$ имеет место равенство:

$$(a + b + c)(a + bm + cm^2) \cdot (a + bm^2 + cm) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

40. Показать, что если $x + y + z = 0$, то

1) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$,

2) $6(x^5 + y^5 + z^5) = 5(x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3)$,

3) $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5(x^2 + y^2 + z^2) \cdot xyz$.

41. Доказать, что если:

$x = a(b^3 - c^3)$, $y = b(c^3 - a^3)$, $z = c(a^3 - b^3)$, то

$$abc(x^3 + y^3 + z^3) = xyz(a^3 + b^3 + c^3).$$

42. Доказать, что

$$\left(x^3 + x^2 + x + 1 - \frac{2}{x-1}\right)\left(x^3 - x^2 + x - 1 - \frac{2}{x+1}\right) = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1).$$

43. Показать, что если $c^2 = a^2 + b^2$, то

$$(4a - 3b + 5c)(-4a - 3b + 5c)$$

является квадратом многочлена с целыми коэффициентами.

44. Найти общий вид многочлена третьей степени, дающего при делении на $x - 1$ в остатке 1, а при делении на $x - 2$ — в остатке 2. Какой остаток получается при делении этого многочлена на $(x - 1)(x - 2)$?

45. Трёхчлен $x^4 + ax^2 + b$ делится на $x^2 + 2x + 5$. Найти коэффициенты a и b, а также частное от деления первого многочлена на второй.

46. Найти значения a, b и c, при которых многочлен $x^4 + ax^2 + bx + c$ делится:

1) на $(x - 1)^3$;

2) на $(x + 1)^2$.

47. При каких a и b трёхчлен ax^4+bx^3+1 делится на $(x-1)^2$?

48. При каких a и b многочлен $x^4+x^3+2x^2+ax+b$ является полным квадратом?

49. При каких a и b многочлен

$$x^6+ax^5+(2a+1)x^4+bx^3+(2a+1)x^2+ax+1$$

делится на возможно большую степень $x+1$?

50. При каких a, b и c многочлен $x^4+ax^3+bx^2+cx+4$ является точным квадратом другого многочлена и принимает значение 1 при $x=-1$?

51. Доказать, что произведение $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ есть сумма двух квадратов.

52. Выражение $2a^2+3b^2+6c^2$ представить в виде суммы трех квадратов.

53. Показать, что $a^4+b^4+(a+b)^4$ есть сумма четырёх квадратов.

54. Доказать, что выражение $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ можно представить в виде неполного квадрата разности двух двучленов.

55. Доказать, что произведение $xy(3x+2)(5y+2)$ есть разность квадратов двух многочленов.

56. Доказать, что дроби:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} \text{ и } \frac{x^3-y^3}{x-y}$$

можно представить в виде t^2+3v^2, а дроби:

$$\frac{x^5+y^5}{x+y} \text{ и } \frac{x^5-y^5}{x-y}$$

в виде $5t^2-v^2$, причем t и v — многочлены относительно x и y.

57. Доказать, что дроби:

$$\frac{x^7+y^7}{x+y} \text{ и } \frac{x^7-y^7}{x-y}$$

можно представить в виде t^2+7v^2, а дроби:

$$\frac{x^{11}+y^{11}}{x+y} \text{ и } \frac{x^{11}-y^{11}}{x-y}$$

в виде t^2+11v^2, причем t и v — многочлены относительно x и y.

58. Доказать, что дробь

$$\frac{x^{13}+y^{13}}{x+y}$$

можно представить в виде $13t^2-v^2$, где t и v — многочлены относительно x и y.

59. Исключить x и y из равенств:

$$x+y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ x^3+y^3=c^3.$$

60. Доказать, что если $f(x)$ — многочлен n-ой степени, то сумма его значений: $f(1)+f(2)+\cdots+f(m)$ есть многочлен от m степени $n+1$.

Например: 1) если $f(x)=x$, то

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(m)=1+2+\cdots+m=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m;$$

2) если $f(x)=x^2$, то

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(m)=1^2+2^2+\cdots+m^2=$$

$$=\frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m;$$

3) если $f(x)=(2x-1)^3$, то

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(m)=2m^4-m^3 \text{ (проверить!)};$$

4) если $f(x)=ax^2+bx+c$, то

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(m)=\frac{1}{6}m\,[2am^2+$$

$$3(a+b)m+a+3b+6c] \text{ (проверить!)}.$$

61. Доказать, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма n квадратов, может быть представлено в виде суммы $\frac{n^2-n+2}{2}$ квадратов.

62. Доказать, что если натуральное число есть сумма четырёх квадратов, то его квадрат можно представить в виде суммы пяти квадратов.

63. Доказать методом математической индукции следующие равенства:

1) $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

2) $1^3+2^3+\cdots+n^3+[n(n+1)]^3+[n(2n+1)]^3+\cdots+$

$+[n(n^2+1)]^3=\left[\frac{n(n^2+1)(n^2+n+1)}{2}\right]^2$.

3) $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+m(m+1)+(m-1)(m+2)+(m-2)$

$(m+3)+\cdots+2(2m-1)+1\cdot 2m=m^2(m+1)$.

4) $1+\frac{1}{a_1}+\frac{a_1+1}{a_1a_2}+\frac{(a_1+1)(a_2+1)}{a_1a_2a_3}+\cdots+$

$$+\frac{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}{a_1a_2\cdots a_n a_{n+1}}=$$

$$=\frac{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)(a_{n+1}+1)}{a_1a_2\cdots a_n a_{n+1}}.$$

5) $1+1+2+3+5+8+\cdots+U_n=U_{n+2}-1$

(числа 1, 1,2, 3, 5, 8, 13, $\cdots$ называются числами Фибоначчи. n-ое число Фибоначчи через два предыдущих выражается с помощью рекуррентной формулы: $U_n=U_{n-1}+U_{n-2}$, $U_1=1$ и $U_2=1$ — фиксируются заранее).

6) $U_1^2+U_2^2+\cdots+U_n^2=U_{n+1}\cdot U_{n+2}$,

где U_1, U_2, $\cdots$, U_{n+2} — числа Фибоначчи.

7) $U_n^2-U_{n-1}\cdot U_{n+1}=(-1)^{n+1}$,

где U_{n-1}, U_n, U_{n+1} — три последовательных числа Фибоначчи.

64. Задача греческого математика Никомаха (1 в. н. э). Показать, что если разбить ряд нечётных чисел на группы так, что число членов каждой группы будет возрастать, как ряд натуральных чисел, то сумма членов каждой группы будет равна кубу числа её членов.

65. Задачи Коши. Чему равна дробь:

$$\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}},\quad \text{если}\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\ ?$$

66. Задачи известного французского математика Ж. Бертрана (1822—1900). Доказать равенства:

1) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4;$

2) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2};$

3) $\sqrt{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}=3.$

67. Задача Лейбница. Проверить равенство:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}.$$

68. Задача итальянского математика Бомбелли (XVI в.). Проверить равенство:

$$\sqrt{2+\sqrt{-121}}+\sqrt{2-\sqrt{-121}}=4.$$

69. Задача Маклорена. Преобразовать выражение:

$$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}.$$

70. Задача великого французского математика Лагранжа (1736—1813). Проверить тождество:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=$$

$$=(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$$

71. Задача из французского математического журнала (XIX в.). Доказать, что при n натуральном выражение $4^{2n}-3^{2n}-7$ кратно 84.

72. Задача из „Курса математики" Аллеза и др. (1813.) Извлечь квадратный корень из многочлена:

$$16c+4a^2-12ab+9b^2-24bc+16c^2.$$

73. Задача Эпафродита. Найти сумму кубов первых n натуральных чисел.

74. Задача Ферма́. Проверить, что

$$5 \cdot (1^4 + 2^4 + \ldots + n^4) = (4n + 2) \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^4).$$

75. Задача из французского „Журнала элементарной математики". Доказать, что при всяком целом значении n число $n(n^2 - 1)(n^2 - 5n + 26)$ кратно 120.

* * *

Разложить[1] на множители следующие выражения (76—107)

76. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.
77. $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$.
78. $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$.
79. $a^3(c - b) + b^3(a - c) + c^3(b - a)$.
80. $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc$.
81. $a^4 + b^4$.
82. $a^4 + b^4 + (a + b)^4$.
83. $a^5 + b^5 - (a + b)^5$.
84. $a^4 + a^2b^2 + b^4$.
85. $a^6 - b^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4$.
86. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.
87. $(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$.
88. $[a(x + y) + b(x - y)]^2 - [a(x - y) + b(x + y)]^2$.
89. $a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + 4ab^3 - 4a^3b$.
90. $(1 + c^2 + b^2 - 2c)^2 - (4b - 4bc)(1 + c^2 - b^2 - 2c)$.
91. $p(p - a)(p - b) + p(p - b)(p - c) + p(p - c)(p - a)$ при $a + b + c = 2p$.
92. $a^4 - 4a^2 + 8a - 4$.
93. $16 + 41a - 8\sqrt{a} \cdot (3 + 3a) + 16a^2$.
94. $9a^3 + 7a^2 - 7a - 9$.
95. $x^3 - x^2 + x - a^3 - 2a^2 - 2a - 1$.
96. $x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625$.
97. $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$.
98. $2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6$.
99. $x^6 + 8x^5 + 28x^4 + 56x^3 + 68x^2 + 48x + 16$.

---

[1] Имеется в виду разложение в области действительных чисел.

100. $a^2(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+$
$+b^2(c-a)(a+b-c)(-a+b+c)+$
$+c^2(a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$.

101. $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2-3abc$

102. $a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$

103. $a^3-b^3-c^3+a^2(b+c)-ab^2-ac^2-3bc(b+c)-2abc$

104. $a^4+b^4+c^4+4ab(a^2+b^2+c^2)+$
$6a^2b^2-2c^2(a^2+4ab+b^2)$.

105. $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$.

106. $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4$.

107. **Задача французского математика Софьи Жермен (1778—1830).**

Разложить на множители выражение n^4+4.

§ 4. Схема Горнера[1]. Нахождение рациональных корней уравнения.

Согласно теореме Безу остаток от деления миогочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\ldots \qquad (1)$$

на двучлен $x-\alpha$ равен значению данного многочлена при $x=\alpha$:

$$r=f(\alpha)=a_0\cdot\alpha^n+a_1\cdot\alpha^{n-1}+\ldots+a_n\ldots \qquad (2)$$

Если частное от деления многочлена (1) на $x-\alpha$ обозначить через $\varphi(x)$, то

$$\varphi(x)=b_0\cdot x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}\ldots \qquad (3)$$

получим тождественное равенство:

$$f(x)\equiv\varphi(x)\cdot(x-\alpha)+f(\alpha)\equiv(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})(x-\alpha)+f(\alpha)\ldots \qquad (4)$$

Значение x, при котором многочлен $f(x)$ обращается в нуль, называется корнем данного многочлена. Очевидно, корни мно-

---

[1] У. Горнер — английский математик. В 1819 г. Горнер открыл метод приближенного нахождения вещественных корней алгебраических уравнений любых степеней с числовыми коэффициентами. Этот метод уже в VIII в. был известен китайцам под названием „Метода небесного элемента". Схема деления миогочлена на двучлен принадлежит Горнеру и раиее у других авторов не встречалась.

гочлена $f(x)$ совпадают с корнями соответствующего уравнения:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_n=0\ \ldots \qquad (5)$$

Из теоремы Безу следует, что если α служит корнем многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится без остатка на $x-\alpha$:

$$f(x)=\varphi(x)\cdot(x-\alpha)\ \ldots \qquad (6)$$

и обратно, если $f(x)$ делится без остатка на $x-\alpha$, то α — корень $f(x)$, или соответствующего уравнения (5). Во всех случаях из равенства (4) получается, что

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\varphi(x)\ \ldots \qquad (7)$$

Пример. Пусть $f(x)=x^4-5x^3+5x^2+2;\ \alpha=1.$

Тогда

$$f(1)=3;\ f(x)-3=x^4-5x^3+5x^2-1=x^4-1\ -5x^2(x-1)$$

делится нацело на $x-1$.

Пользуясь методом неопределённых коэффициентов, из тождественного равенства (4) можно определить коэффициенты частного $\varphi(x)$ и остаток $r=f(\alpha)$ от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x-\alpha$. Для этого раскроем скобки в правой части этого равенства, сделаем приведение подобных членов и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x в обеих частях равенства:

$$b_0=a_0;\ \ b_1-\alpha b_0=a_1;\ \ b_2-\alpha b_1=a_2;\ \ \ldots;\ b_{n-1}-\alpha b_{n-2}=$$

$$=a_{n-1};\ r-\alpha b_{n-1}=a_n.$$

Отсюда получаем

$$b_0=a_0;\ b_1=\alpha b_0+a_1;\ b_2=\alpha b_1+a_2;\ \ \ldots;\ b_{n-1}=\alpha b_{n-2}+$$

$$+a_{n-1};\ r=\alpha b_{n-1}+a_n.$$

На основании последних равенств коэффициенты частного: b_0, b_1, b_2, . . . , b_{n-1} и остаток r можно последовательно вычислить, пользуясь следующей схемой Горнера.

a_0	a_1	a_2	...	$a_к$	...	$a_{п-1}$	$a_п$
$b_0=a_0$	$\alpha b_0+a_1=b_1$	$\alpha b_1+a_2=b_2$	...	$\alpha b_{к-1}+a_к=b_к$	...	$\alpha b_{п-2}+a_{п-1}=b_{п-1}$	$\alpha b_{п-1}+a_п=r$

В первой строке схемы последовательно расположены коэффициенты делимого многочлена, во второй строке — коэффициенты частного и (в конце строки) остаток от деления на $x-\alpha$.

Ключ к схеме таков:

$$\alpha \longrightarrow b_{к-1} \nearrow \downarrow \begin{matrix} a_к \\ b_к \end{matrix}$$

α умножается на $b_{к-1}$ и к произведению прибавляется $a_к$, в результате получается $b_к$. Так, для нашего примера схема будет такова:

	1	−5	5	0	2
1	1	−4	1	1	3

Частное: $\varphi(x)=x^3-4x^2+x+1$;
Остаток: $f(1)=3$.

Упражнения. С помощью схемы Горнера выполнить деление:

1. x^5-x^3+3x-1 на $x-2$.
2. x^3-7x^2+3x+4 на $x+1$.
3. x^n-1 на $x-1$ и $x+1$.
4. $x^{2к+1}+1$ на $x+1$ и $x-1$.
5. $x^{2к}+1$ на $x+1$ и $x-1$.

6. Показать, что если коэффициенты делимого многочлена и α — все целые, то и коэффициенты частного $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ — все целые числа.

7. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами:

$$a_0x^n+a_1\cdot x^{n-1}+\ldots+a_п=0 \ldots \qquad (8)$$

являются делителями свободного члена $a_п$. (Доказать самим).

Отсюда следует, что при нахождении целых корней уравнения с целыми коэффициентами достаточно испытать все де-

лители свободного члена (или непосредственной подстановкой или по схеме Горнера). Например, целые корни уравнения:

$$2x^4 - 13x^2 + 13x - 6 = 0$$

следует искать среди чисел: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6. Испытанием находим два целых корня: $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$ (выкладки по схеме Горнера проделать самим).

8. Предыдущая теорема обобщается так:

Если уравнение с целыми коэффициентами:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \ldots \qquad (8)$$

имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно просты, то a_0 делится на q, a_n делится на p. Доказать.

9. Для того чтобы целое число α было корнем уравнения (8), необходимо, чтобы каждое из чисел

$$\frac{f(1)}{\alpha - 1} \quad \text{и} \quad \frac{f(-1)}{\alpha + 1} \ldots \qquad (9)$$

было целым. (Показать справедливость этого утверждения на основе равенства (6)). Имеется в виду, что 1 и -1 не являются корнями этого уравнения.

Если бы 1 или -1 были корнями данного уравнения, то путём деления на $x - 1$ или $x + 1$ соответствующее число раз (если, например, $x = 1$ — двукратный корень, то на $x - 1$ разделили бы подряд два раза), искали бы корни полученного частного, уже не имеющего ни корня $x = 1$, ни корня $x = -1$. Отсюда следует, что из делителей a_n испытанию подлежат только те, которые дают целые значения для дробей (9). Так, для примера, взятого выше, имеем:

	2	0	−13	13	−6	
1	2	2	−11	2	−4	$f(+1) = -4$.
−1	2	−2	−11	24	−30	$f(-1) = -30$.

При $\alpha = 2$ выражения (9) дают целые числа.

Испытаем этот делитель

	2	0	−13	13	−6	
2	2	4	−5	3	0	$f(2)=0$. $\varphi(x)=2x^3+4x^2-5x+3$
2	2	8	11	25		$\varphi(2) = 25 \neq 0$.

Число 2 является простым, некратным корнем нашего уравнения.

Разделив обе части уравнения на $x-2$, получим новое уравнение (коэффициенты см. в схеме Горнера):

$$\varphi(x)=2x^3+4x^2-5x+3.$$

Здесь делители ± 3 (± 1 испытаны раньше); $\varphi(-1)=10$, $\varphi(1)=4$.

Если $\alpha=3$, то

$$\frac{\varphi(-1)}{3+1}=\frac{10}{4}$$

дробное число, поэтому этот делитель исключаем. Наконец, если $\alpha=-3$, то

$$\frac{\varphi(-1)}{-3+1} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(1)}{-3-1}$$

целые числа. Испытываем по схеме Горнера число -3:

	2	4	−5	3
−3	2	−2	1	0

$\varphi(-3)=0$.

Число -3 оказалось вторым и последним целым корнем решаемого уравнения.

В результате мы получили возможность найти также и другие корни этого уравнения, решив квадратное уравнение:

$$2x^2-2x+1=0$$

Замечание 1. Нет никакой необходимости всё время чертить схему Горнера, так как все испытания можно последовательно проделать по одной схеме. Можно было бы не вычислять $\varphi(-1)$ и $\varphi(1)$, а пользоваться $f(-1)$ и $f(1)$.

10. Доказать, что если коэффициент старшего члена уравнения равен единице, а остальные коэффициенты — целые числа, т. е.

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \text{ — все целые,}$$

то уравнение не может иметь дробных рациональных корней: оно либо совершенно не имеет рациональных корней, либо его рациональные корни — целые.

Указание. Доказательство от противного. Допустить, что уравнение имеет корень $x = \frac{p}{q}$ при условии, что дробь $\frac{p}{q}$ несократима.

Замечание 2. Любое уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \ldots$$

с рациональными коэффициентами можно свести к равносильному уравнению с целыми коэффициентами:

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \quad \cdots \qquad (10)$$

(Как это сделать?) После этого, умножив обе части полученного уравнения (если $c_0 \neq 1$) на c_0^{n-1} и обозначив $c_0 \cdot x = y$, получим уравнение с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице:

$$y^n + a_1' \cdot y^{n-1} + \ldots + a_n' = 0 \ldots \qquad (11)$$

(a_1', . . . , a_n' — все целые). Корни уравнения (10) получаются из корней уравнения (11) по формуле:

$$x = \frac{y}{c_0} \ldots \qquad (12)$$

Отсюда, в частности, видно, что целым корням последнего уравнения соответствуют рациональные корни предыдущего уравнения. Если окажется, что уравнение (11) не имеет целых корней, то уравнение (10) не будет иметь рациональных корней. Мы видим, что нахождение рациональных корней уравнений с произвольными рациональными коэффициентами сводится к нахождению целых корней уравнения вида (11).

Упражнения. Найти рациональные корни уравнений:

1. $x^3 - \frac{11}{3}x^2 + 2\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$. Ответ: $x = 3$.

2. $2x^4 - \frac{17}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} = 0$. Ответ: $x = 2$.

Метод нахождения рациональных корней многочленов во многих случаях облегчает решение уравнений высших степеней.

§ 5. О решении дробных уравнений

Если уравнение содержит дробные функции от неизвестного, то оно называется дробным.

При решении дробных уравнений все члены следует перенести в левую часть и последнюю представить в виде одной дроби:

$$\frac{M(x)}{N(x)}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если $N(x)$ не обращается в нуль, то уравнение (1) равносильно уравнению:

$$M(x)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

И корни уравнения (1) получаются из уравнеиия (2). Может оказаться, что дробь в левой части уравнения (1) сократима. Тогда производят сокращение, потом новый числитель приравнивают нулю. Но сократить дробь часто бывает нелегко. Практически целесообразнее решить уравнение (2) и исключить все те его корни, которые обращают в нуль знаменатель $N(x)$, т. е одновременно являются и его корнями.

С целью упрощения решения уравнение вида:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{F(x)}{\Phi(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

иногда заменяют таким:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\Phi(x)}{F(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

Такое преобразование не всегда приводит к равносильному уравнению. Например, в исходном уравнении имеется в виду, что $\varphi(x)\neq 0$ и $\Phi(x)\neq 0$, а в уравнении (3′) должно быть: $f(x)\neq 0$ и $F(x)\neq 0$. В то же время, очевидно, что $f(x)=0$ и $F(x)=0$ для уравнения (3′) возможны, $f(x)=0$ и $F(x)=0$ возможны для исходного уравнения.

Другим важным преобразованием уравнения (3) является следующее:

$$\frac{f(x)+\varphi(x)}{f(x)-\varphi(x)}=\frac{F(x)+\Phi(x)}{F(x)-\Phi(x)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

основанное на свойстве пропорций.

В уравнении (4) исключены равенства:

$$f(x) = \varphi(x) \text{ и } F(x) = \Phi(x), \qquad (\alpha)$$

хотя при условии (α) исходное уравнение удовлетворяется, т. е. корни уравнений (α) служат корнями уравнения (3).

С другой стороны, легко заметить, что при

$$f(x) = 0 \text{ и } \Phi(x) = 0 \qquad \ldots \quad (\beta)$$

уравнение (4) удовлетворяется, хотя соответствующие значения для x в исходном уравнении исключены. Эти корни — корни уравнений (β), удовлетворяющие уравнению (4), для уравнения (3) являются посторонними.

Из сказанного следует, что рассмотренные преобразования дробных уравнений надо делать осторожно, чтобы не происходило потери корней и приобретения посторонних корней.

Рассмотрим примеры.

1. Решить уравнение:

$$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+5x-5}.$$

Решение. Очевидный корень уравнения: $x = 0$.

Если употребим первое преобразование, получим уравнение:

$$\frac{x^2+1}{2x} = \frac{x^2+5x-5}{x},$$

где уже $x \neq 0$ исключается и, следовательно, этот корень исходного уравнения теряется.

Решаем новое уравнение:

$$\frac{x^2+10x-11}{2x} = 0.$$

Корни его находим из квадратного уравнения:

$$x^2+10x-11 = 0.$$

Получаем: $x_1 = 1$; $x_2 = -11$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению, но, как видели выше, корень $x = 0$ из второго уравнения не получается.

2. Решить уравнение:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x+4}.$$

Решение. Употребим второе преобразование:

$$\frac{2x-1}{3}=\frac{2x+1}{-7}.$$

Здесь знаменатели не обращаются в нуль (отличны от нуля), поэтому всё благополучно. Находим корень последнего уравнения: $x=\frac{1}{5}$, который является одновременно и корнем исходного уравнения (Проверить!).

3. Решить уравнение:

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{2x^2-3x+2}{2x^2+3x+2}.$$

Решение. Применим опять производную пропорцию:

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{2x^2+2}{-3x},$$

здесь надо, чтобы $x\neq 0$. Опять корень $x=0$ теряется. Решаем последнее уравнение по общему правилу:

$$\frac{5\cdot(x^2+1)}{3x}=0$$

Из уравнения:

$$x^2+1=0$$

находим: $x=\pm i$. (Вспомогательное уравнение не имеет действительных корней). Легко видеть, что $x=\pm i$ являются корнями исходного уравнения (Проверить!), но если бы это уравнение решалось в области вещественных чисел, то для него не было бы получено ни одного корня, так как его единственный вещественный корень $x=0$ был потерян при переходе к вспомогательному уравнению, у которого вовсе не оказалось действительного корня.

§ 6. О решении иррациональных уравнений[1]

а) При решении иррациональных уравнений в действительной области неизвестные и радикалы должны удовлетворять следующим условиям возможности извлечения и смысла радикала $\sqrt[n]{a}$ в области действительных чисел:

[1] Решение иррациональных уравнений в комплексной области рассматривать не будем.

1. Для неизвестных допустимы только такие действительные значения, при которых значения подкоренных выражений радикалов чётной степени неотрицательны, т. е. либо равны нулю, либо положительны.

II. За значение радикала $\sqrt[2k]{a}$ всегда берется арифметический корень: $+\sqrt[2k]{a}$, т. е. значение радикалов чётной степени всегда неотрицательны.

III. За значение радикала $\sqrt[2k+1]{a}$ всегда (т. е. при любом действительном a) берётся его единственное действительное значение.

б) **Общий принцип решения иррациональных уравнений.** Путём уничтожения всех иррациональностей данное иррациональное уравнение сводится к алгебраическому уравнению[1]. Потом решается это последнее, и из его корней выделяют те, которые удовлетворяют данному иррациональному уравнению.

Таким образом, при решении иррациональных уравнений самым главным является сведение его к алгебраическому или алгебраическим уравнениям.

в) Существуют следующие основные способы преобразования иррациональных уравнений к алгебраическим:

1. **Возведение в степень.** Путём последовательного возведения в степень всегда есть возможность прийти к алгебраическому. Однако этот способ неудобен тем, что при наличии нескольких радикалов получается алгебраическое уравнение высокой степени. Другим недостатком этого способа является то, что при возведении в чётную степень могут появиться посторонние корни. Например, уравнения:

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \sqrt[2k]{f(x)} = -\varphi(x), \quad \ldots \qquad (1)$$

где $f(x) \geqslant 0$ и $\varphi(x)$ — рациональные функции от x. Оба приводятся к одному и тому же алгебраическому уравнению:

$$f(x) = [\varphi(x)]^{2k} \ldots \qquad (2)$$

Если взять корень $x = \alpha$ второго из уравнений (1), то при $\varphi(\alpha) \neq 0$ он не будет удовлетворять первому из этих уравнений, а уравнению (2) удовлетворяет. Это значит, что число α — корень уравнения (2) для уравнения:

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \varphi(x) \quad \ldots . \qquad (3)$$

---

[1] Алгебраическим уравнением с одним неизвестным в области рациональных чисел называется уравнение с рациональными коэффициентами:

$$a_0 x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0.$$

является посторонним. Чтобы исключить посторонние корни, необходима проверка подстановкой корней алгебраического уравнения в данное уравнение. Такая проверка требуется всегда, когда возводим в чётную степень.

Возведение обеих частей уравнения в нечётную степень равносильности уравнений не нарушает и не порождает посторонних корней, поэтому в случаях возведения в нечётную степень проверки не требуется.

Если предварительно в уравнении выделить всё множество значений x, при которых

$$\varphi(x) \geqslant 0 \tag{4}$$

Тогда при возведении обеих частей в степень 2κ, полученное уравнение (2) будет равносильно уравнению (3). В данном случае надо следить только за тем, чтобы корни уравнения (2) удовлетворяли условию (4).

2) **Способ подстановки.** Вводится одно или несколько обозначений посредством одного или нескольких неизвестных. Применяя данный способ, надо помнить сказанное в *п. а*). А именно: если через новое неизвестное обозначен корень чётной степени, то для этого нового неизвестного допустимы только неотрицательные значения. Например, при обозначении:

$$\sqrt[2\kappa]{f(x)} = U \tag{5}$$

из корней вспомогательного уравнения следует взять только неотрицательные, так как должно быть $U \geqslant 0$. После этого отпадает и необходимость проверки.

3) **Способ применения тождеств.** Например, при наличии уравнений:

$$\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{\varphi(x)} = \psi(x)$$

удобно применить тождество:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \mp (a \pm b)\, 3ab \tag{α}$$

здесь $a \pm b$ заменяется правой частью уравнения.

4) **Способ производных пропорций.** Применяется к дробно-иррациональным уравнениям. Здесь надо иметь в виду общие замечания относительно решения дробных уравнений способом производных пропорций.

5) **Способ умножения на сопряжённое выражение.** Если левая часть иррационального уравнения:

$$I(x) = 0 \tag{6}$$

умножить на сопряжённое выражение $\bar{f}(x)$, то получим алгебраическое уравнение, из корней которого необходимо отбросить все те, которые удовлетворяют уравнению:

$$\bar{f}(x)=0, \tag{7}$$

но не удовлетворяют уравнению (6), иначе появятся посторонние корни.

Примеры решения иррациональных уравнений.

1. $$\sqrt{x^3+1}=2x-1.$$

Решение. Надо, чтобы было: $x^3+1\geqslant 0$; $2x-1\geqslant 0$. Отсюда для корней уравнеиия находим интервал: $\frac{1}{2}\leqslant x<\infty$. (ограничение только снизу).

Возводим в степень и упрощаем:

$$x(x-2)^2=0.$$

Корни: $x_1=0$; $x_2=2$; $x_3=2$

$x=0$ для данного уравнения — посторонний корень, так как число 0 не попадает в интервал $\frac{1}{2}\leqslant x<\infty$, где обязаны находиться корни решаемого уравнения.

2. $$\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}=3.$$

Решение. Из $x-2\geqslant 0$ и $7-x\geqslant 0$ находим интервал для корней:

$$2\leqslant x\leqslant 7.$$

Последовательно (два раза) возводя в квадрат и решив соответствующее алгебраическое уравнение, получим: $x_1=3$; $x_2=6$. Оба корня попадают в интервал $2\leqslant x\leqslant 7$, поэтому без проверки считаем, что они удовлетворяют исходному уравнению и других корней у него нет, так как при возведении в степень потери корней никогда не происходит.

3. $$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{3}{2}.$$

Решение. Введём обозначение:

$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=U;\ U\geqslant 0.$$

И решим квадратное уравнение:

$$U-\frac{1}{U}-\frac{3}{2}=0 \text{ или } 2U^2-3U-2=0$$

Находим:

$$U_1=2;\ U_2=-\frac{1}{2}.$$

Второй корень, как отрицательный, отбрасываем, а из уравнения:

$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=2$$

находим корень данного уравнения: $x=-\frac{17}{15}$.

4. $$\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}=\frac{5}{2}.$$

Это уравнение решается аналогично, но его можно решить и пользуясь тождеством (α).

5. $$\sqrt{2-\sqrt{x+2}}=x.$$

Решение. Обозначим: $\sqrt{x+2}=U$. Получим систему:

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}=U; & x\geqslant -2,\\ \sqrt{2-U}=x. & 0\leqslant U\leqslant 2. \quad x\geqslant 0,\ 0\leqslant U\leqslant 2\end{cases}$$

Далее находим:

$$\begin{cases}U^2=x+2,\\ x^2=2-U\end{cases}$$

Отсюда:

$$(U+x)\cdot(U-x-1)=0.$$

1) Если $U+x=0$, то $U=x=0$; $x=0$ не подходит.
2) Если $U-x-1=0$, то $U=x+1$. Подставив это в уравнение $x^2=2-U$, получим: $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Второй корень не подходит. Корием данного уравнения является:

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

6. $$\sqrt{x^2-x+4}+x^2-x=2.$$

Решение. Обозначим: $\sqrt{x^2-x+4}=U$;
Получим квадратное уравнение:

$$U^2+U-6=0$$

с корнями $U_1=2$; $U_2=-3$ (U_2 отбрасываем). Далее из уравнения:

$$\sqrt{x^2-x+4}=2$$

находим: $x_1=0$; $x_2=1$.

7. $$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}.$$

Решение. Обозначаем:

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}=U;\ \sqrt{1-\frac{1}{x}}=v;\ U\geqslant 0;\ v\geqslant 0.$$

Получаем уравнение:

$$(x-1)\cdot[U+v-x]=0.$$

Отсюда находим корень $x_1=1$.
Дальше из уравнений $U+v=x$ и $U-v=\frac{x-1}{x}$ находим:

$$U=\frac{x^2+x-1}{2x},\ v=\frac{x^2-x+1}{2x}.$$

Подставим эти выражения в уравнение $U=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ и решим уравнение четвёртой степени:

$$x^4-2x^3-x^2+2x+1=0$$

(Делается подстановка $t=x-\frac{1}{x}$ и разлагается левая часть).

Окончательно получим: $x_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

8. $$\frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}=\frac{5}{x}.$$

Решение. Применяем производную пропорцию:

$$\frac{\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x}} = \frac{5+x}{5-x};\ -5 \leqslant x < 5$$

и обозначаем:

$$\sqrt{\frac{5+x}{5-x}} = U. \qquad (\gamma)$$

Решаем квадратное уравнение: $U^2 - U = 0$.
Находим корни: $U_1 = 0$, $U_2 = 1$. Теперь находим корни данного уравнения из (γ):

$$x_1 = -5;\ x_2 = 0.$$

Корень $x = 0$ данному уравнению не удовлетворяет — является для него посторонним. Зато корень $x = 5$ был потерян.

9. $$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{10-x} = 3.$$

Решаем с помощью тождества (α)

$$(x-1) + (10-x) = 27 - 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)(10-x)}.$$

После преобразований получим уравнение:

$$x^2 - 11x + 18 = 0,$$

имеющее корни: $x_1 = 2$; $x_2 = 9$, являющиеся корнями и данного уравнения.

10. $$\sqrt[3]{a + \sqrt{2x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{2x}} = \sqrt[3]{2a}.$$

Решается аналогично.

11. $$\sqrt{3x^2 + 7x + 6} + \sqrt{3x^2 + 7x - 6} = 6.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на сопряжённое выражение:

$$\sqrt{3x^2 + 7x + 6} - \sqrt{3x^2 + 7x - 6} = U \qquad (c)$$

(временно число U неизвестно), получим:

$$12 = 6U;\ \text{отсюда: } U = 2.$$

Теперь сложим уравнение (c) и данное уравнение почленно:

$$\sqrt{3x^2+7x+6}=4.$$

Отсюда окончательно для данного уравнения находим:

$$x_1=1,\quad x_2=-\frac{10}{3}.$$

12. Пример уравнения, имеющего бесконечное множество решений:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x+2}+3}+\sqrt{x-4\sqrt{x+2}+6}=1;\quad (x\geqslant -2).$$

Решение. Легко видеть, что под радикалами — точные квадраты:

$$\sqrt{(\sqrt{x+2}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2}\ . \qquad (t)$$

Рассмотрим все возможные случаи:

1) $\sqrt{x+2}-2\geqslant 0$. Имеем уравнение:

$$\sqrt{x+2}-1+\sqrt{x+2}-2=1,$$

дающее решение: $x=2$.

2) $\sqrt{x+2}-1\leqslant 0$. Имеем уравнение:

$$1-\sqrt{x+2}+2-\sqrt{x+2}=1,$$

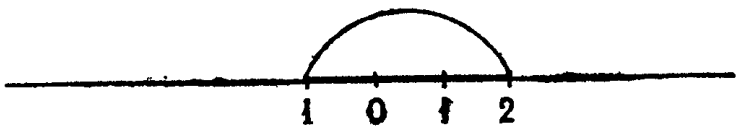
дающее решение: $x=-1$.

3) $1<\sqrt{x+2}<2$. Имеем уравнение:

$$\sqrt{x+2}-1+2-\sqrt{x+2}=1,$$

являющееся тождественным при любых $x\geqslant -2$. Но $\sqrt{x+2}>1$ при $x>-1$, а $\sqrt{x+2}<2$ при $x<2$. Следовательно, данному уравненню удовлетворяет все множество действительных чисел интервала $-1<x<2$. Учитывая ранее полученные корни, замечаем, что все числа отрезка $-1\leqslant x\leqslant 2$ удовлетворяют данному уравнению.

Ниже на числовой оси изображено все бесконечное множество решений нашего уравнения.



В заключение разберём один пример на графическое решение. Пусть надо решить уравнение:

$$x^2 = \sqrt{2x+12};\ (x \geqslant -6).$$

Строим графики функций:

$$y = x^2 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{2x+12}.$$

Абсциссы точек их пересечения дают корни данного уравнения. На графиках получается $x_1 \approx -1{,}7$; $x_2 \approx 2$. Легко видеть, что точное значение одного из корней есть 2. На графике также видно, что только эти числа являются корнями нашего уравнения, так как построенные графики пересекаются только в двух точках.

§ 7. О решении систем уравнений[1]

1. Системы уравнений первой степени

а) Системы однородных уравнений. Так называются системы уравнений, свободные члены которых равны нулю. Такова, например, система:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0; \\ a_2x + b_2y = 0. \end{cases}$$

Система однородных уравнений всегда имеет решение — его очевидным (тривиальным) решением является нулевое решение.

Но бывает и так, что такая система, кроме нулевого, имеет и ненулевые решения (можно показать, что при наличии одного ненулевого решения, система будет иметь бесконечно много ненулевых решений). Это будет в том случае, когда одно или несколько уравнений системы получаются, как следствие из остальных уравнений. Вот пример такой системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0; \\ 5x - y + z = 0; \\ 11x + 8y - 2z = 0 \end{cases}$$

Здесь последнее уравнение получается, как следствие первых двух. (Проверить).

---

[1] Разговор будет идти о таких способах и приёмах, которые в школьном курсе алгебры не рассматриваются.

б) **Треугольные системы.** Линейная система называется полной треугольной, если её уравнения можно записать так, что первое будет содержать только одно неизвестное и в каждом последующем уравнении, кроме содержащихся в предыдущем, имеется ещё одно новое неизвестное.

Общий вид такой системы:

$$\left.\begin{aligned} &a_1x_1 = m_1\\ &a_2x_1 + b_1x_2 = m_2,\\ &a_3x_1 + b_2x_2 + c_1x_3 = m_3,\\ &a_nx_1 + b_{n-1}x_2 + c_{n-2}x_3 + \ldots + d_1x_n = m_n, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(Число неизвестных равно числу уравнений, $a_1 \neq 0$).

Если в системе (1) отсутствует одно или несколько первых уравнений (соответствующие коэффициенты равны нулю), то система называется усечённой треугольной. Такая система имеет бесконечное множество решений.

в) **Метод неопределённых коэффициентов.** Этот метод позволяет сразу исключить все неизвестные, кроме какого-нибудь одного.

Поясним на примере, как это делается.

Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4;\\ 3x + 2y + 2z = 7;\\ 4x - y + 5z = 8. \end{cases}$$

Решение. Умножим первые два уравнения на m и n и сложим почленно все уравнения:

$$x(2m + 3n + 4) + y(3m + 2n - 1) + z(-m + 2n + 5) =$$

$$= 4m + 7n + 8.$$

Потребуем здесь, чтобы коэффициенты при y и z обратились в нуль:

$$\begin{cases} 3m + 2n = 1;\\ -m + 2n = -5. \end{cases}$$

Из этой системы найдём неопределённые множители m и n:

$$m = \frac{3}{2}, \quad n = -\frac{7}{4}$$

Для нахождения x теперь имеем равенство:

$$x = \frac{4m + 7n + 8}{2m + 3n + 4}.$$

Отсюда $x = 1$. Остальные неизвестные находим из двух каких-нибудь уравнений системы, подставив в них значение x. (Проделать это самим!).

г) Некоторые специальные приёмы, зависящие от структуры решаемых систем уравнений.

Ограничимся примерами:

1. $\begin{cases} mx + ny = a, \\ \kappa x - ny = в. \end{cases}$ $\Big|$ $x = \dfrac{a + в}{m + \kappa}$, $y = \dfrac{a\kappa - вm}{n(m + \kappa)}$ при $m + \kappa \neq 0$.

2. Пример на применение производных пропорций:

$$\frac{x + y}{11} = \frac{x - y}{3}; \quad 7x + 4y = 65.$$

Из первого уравнения получаем:

$\dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{4}$, или $x = 7\kappa$, $y = 4\kappa$. (κ — вспомогательное неизвестное).

Подставив эти выражения x и y во второе уравнение, найдём:

$k = 1$. Потом найдём: $x = 7$, $y = 4$.

3. Введение вспомогательного неизвестного.

1) $\dfrac{x - a_1}{m_1} = \dfrac{y - a_2}{m_2} = \dfrac{z - a_3}{m_3}$; $n_1x + n_2y + n_3z = \kappa$.

обозначаем каждое отношение через t и выражения для x, y и z подставляем в последнее уравнение. Дальше, как в п. 2. (До конца довести самим).

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{в}; \dfrac{y}{c} = \dfrac{z}{d}; \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = s. \end{cases}$

Перепишем первые уравнения так:

$$\frac{x}{ac} = \frac{y}{вc}; \quad \frac{y}{вc} = \frac{z}{вd}.$$

Теперь каждое из этих отношений обозначим через t и из последнего уравнения найдём t и т. д. (Довести до конца).

4. Левая часть каждого уравнения получается круговой перестановкой иеизвестных:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_n = a_1, \\ x_3 + x_4 + \ldots + x_1 = a_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n + x_1 + \ldots + x_{n-2} = a_{n-1}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = a_n. \end{cases}$$

Система решается так: сначала складывают все уравнения почленно и находят сумму всех неизвестных:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1} = s\ . \qquad (\alpha)$$

Потом из равенства (α) и каждого из уравнений находят все неизвестные:

$$x_1 = s - a_1;\ x_2 = s - a_2;\ \ldots;\ x_n = s - a_n.$$

Аналогично решается система:

$$\begin{cases} mx + y + z = a, \\ x + my + z = b, \\ x + y + mz = c. \end{cases}$$

2. Системы уравнений высших степеней.

Способ последовательного исключения неизвестных приводит к уравнениям высших степеней. Но уравнения выше четвёртой степени в общем случае алгебраически не решаются. Тем более мы не можем рассчитывать на их решение в курсе элементарной алгебры. Отсюда ясно, что только некоторые спецнальные виды систем уравнений можно решать средствамн школьной математики. Каждый отдельный приём применнм к какому-то определённому, не очень широкому классу систем уравнений. Как правило, эти приёмы все искусствеиные. Правда, иногда они очень остроумны и изящны, однако они остаются в категории узких, частных способов. Поэтому надо иметь достаточно навыков, чтобы хорошо уметь решать отдельные частные виды систем уравнений высших степеней. В приводимых в настоящем задачнике примерах чнтатель встретнтся с весьма разнообразными искусственными приёмамн. Здесь же мы ограннчимся рассмотрением только некоторых наиболее часто применяемых приёмов решення систем высших степеней.

а) **Применение теоремы Вьета.** В случае системы двух уравнений с двумя неизвестными находим значения $x+y$ и xy:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

Потом решаем квадратное уравнение:

$$t^2-at+b=0, \ (v),$$

корни которого дадут нам решения нашей системы:

$$x_1=t_1, \ y_1=t_2; \ x_2=t_2, \ y_2=t_1.$$

В частности, так решаются системы уравнений:

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha, \\ x^n\pm y^n=\beta. \end{cases}$$

Здесь сначала находят выражение для xy из второго уравнения, учитывая, что $x\pm y=\alpha$.

Например, при $n=3$, из тождества:

$$x^3\pm y^3=(x\pm y)^3\mp 3xy\,(x\pm y)$$

при известном $x+y$ или $x-y$ легко найти xy.

Рассмотрим пример:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x^3+y^3=9. \end{cases}$$

Из приведённого тождества получаем:

$$9=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy\,(x+y)=3^3-3xy\cdot 3.$$

Отсюда: $xy=2$.
Наконец, решаем систему:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$$

посредством вспомогательного уравнения (v).

б) **Если левые части системы двух уравнений суть однородные многочлены одной и той же степени, а правые час-**

ти не нули, то применяется подстановка $y = ux$ **или** $x = vy$.
Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

Решение. Учитывая подстановку $x = vy$, напишем систему так:

$$\begin{cases} y^3(1 + v^3) = 9, \\ y^3(v^2 - v) = 2. \end{cases}$$

Здесь $y \neq 0$, поэтому после почленного деления получим:

$$2v^3 - 9v^2 + 9v + 2 = 0 \text{ или } (v - 2)(2v^2 - 5v - 1) = 0.$$

Отсюда находим:

$$v_1 = 2;\ v_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Далее из уравнения:

$$y^3 = \frac{2}{v^2 - v}.$$

Находим значения y, придавая v значения v_1, v_2, v_3.

В поле комплексных чисел получим 9 решений:

1) Из y_{1-3} получим $x_{1-3} = v_1 y_{1-3}$;
2) из y_{4-6} » $x_{4-6} = v_2 y_{4-6}$;
3) из y_{7-9} » $x_{7-9} = v_3 y_{7-9}$.

Решите таким способом систему:

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1. \end{cases}$$

Следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 19, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 17, \\ y^2 - x\sqrt[3]{xy^2} = 60. \end{cases}$$

решаются с помощью подстановок $y = u^2x$ и $y = u^3x$.

в) **Разложение левых частей на миожители и введение вспомогательного неизвестного.**

Примеры:

1) $\begin{cases} x^2 + xy = a, \\ y^2 + xy = b. \end{cases} \quad \begin{cases} x(x + y) = a, \\ y(x + y) = b. \end{cases}$

Находим: $x+y=\pm\sqrt{a+b}$ (сложили последние два уравнения). Полагая $a+b\neq 0$, получим:

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b}};\quad y=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}.$$

2) $$\begin{cases}\dfrac{x^3}{y}+xy=a^2,\\ \dfrac{y^3}{x}+xy=b^2.\end{cases}$$

Почленным перемножением находим:

$$x^2+y^2=\pm ab.$$

Далее:

$$\frac{x}{y}=\pm\frac{a}{b};\quad x=\pm\frac{a}{b}y;\quad y=\pm\frac{b}{a^2+b^2}\sqrt{\pm ab(a^2+b^2)}.$$

$$x=\pm\frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{\pm ab(a^2+b^2)}.$$

Если $a>0$ и $b>0$, то решения:

$$x=\pm\frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{ab(a^2+b^2)}\ \text{ и }\ y=\pm\frac{b}{a^2+b^2}\sqrt{ab(a^2+b^2)}.$$

будут вещественные.

3) $$\begin{cases}x+\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{bc}{b+c},\\ y+\dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{ca}{c+a},\\ z+\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{ab}{a+b}.\end{cases}$$

Освобождаемся от знаменателей и обозначаем: $xy+yz+zx=u$

$$\begin{cases}y+z=\dfrac{b+c}{bc}\cdot u,\\ z+x=\dfrac{c+a}{ca}\cdot u,\\ x+y=\dfrac{a+b}{ab}\cdot u.\end{cases}$$

Складываем почленно два уравнения и вычитаем третье:

$$x=\frac{u}{a},\qquad y=\frac{u}{b},\qquad z=\frac{u}{c}.$$

Подставляем в уравнение $xy+yz+zx=u$ значения x, y, и z:

$$u^2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=u.$$

Отсюда находим:

$$u_1=0,\ u_2=\frac{abc}{a+b+c}\ \text{при}\ a+b+c\neq 0.$$

Решения данной системы таковы:

$$x=\frac{bc}{a+b+c},\qquad y=\frac{ca}{a+b+c},\qquad z=\frac{ab}{a+b+c}.$$

$u_1=0$ исключаем из-за того, что даёт $x=0$, $y=0$, $z=0$, не удовлетворяющие системе. (Случай $a+b+c=0$ рассмотреть самим).

Решите аналогичным способом систему:

$$\begin{cases} a^2x^2(y+z)^2=(a^2+x^2)\,y^2z^2,\\ b^2y^2(z+x)^2=(b^2+y^2)\,z^2x^2,\\ c^2z^2(x+y)^2=(c^2+z^2)\,x^2y^2. \quad (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0). \end{cases}$$

Указание: сначала разделите почленно уравнения соответственно на $a^2x^2y^2z^2$, $b^2x^2y^2z^2$, $c^2x^2y^2z^2$, потом обозначьте: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=u$, перенесите в левую часть все члены с неизвестными и разложите на множители. Решения: $(0,\ 0,\ m)$, $(0,\ m,\ 0)$ и $(m,\ 0,\ 0)$, где m — любое, как очевидные, получаются сразу. Далее предполагается, что $xyz\neq 0$.

Ответ такой: $x=\pm\frac{2bc}{a(b^2+c^2)}\cdot A$, $y=\pm\frac{2ca}{b(c^2+a^2)}\cdot A$

$z=\pm\frac{2ab}{c(a^2+b^2)}\cdot A$, где $A=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

4)
$$\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz=-8, \\ x^3-y^3+z^3-xyz=6, \\ -x^3+y^3+z^3-xyz=6. \end{cases}$$

Попарным сложением находим:

$$x^3=-1+xyz,\quad y^3=-1+xyz,\quad z^3=6+xyz \qquad (\alpha)$$

Замечаем, что $y^3=x^3$.

Перемножаем почленно уравнения (α):

$$4u^2-11u+6=0,\quad \text{где } u=xyz \qquad (\beta)$$

Отсюда находим значения вспомогательного неизвестного:

$$u_1=2,\ u_2=\frac{3}{4}.$$

Далее:

1) $x^3=-1+u_1=1;\quad x=\sqrt[3]{1}=\varepsilon,\quad y=\varepsilon,\quad z=2\varepsilon.$

2) $x^3=-1+u_2=-\frac{1}{4};\quad x=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\varepsilon,\quad y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\varepsilon,$

$$z=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\varepsilon.$$

Здесь для краткости через ε обозначены корни кубические из единицы.

§ 8. Задачи на составление уравнений.

1. Велосипедист совершил поездку из А в В и обратно. Путь состоял из горизонтальных участков, подъёмов и спусков. На горизонтальных участках его скорость была 12 *км/час*, на подъёмах — 8 *км/час* и на спусках — 15 *км/час*.

Из А в В велосипедист ехал 5 часов, из В в А — 4 часа 39 мин. Зная, что общая длина горизонтальных участков составляла 28 *км*, определить общую длину подъёмов и общую длину спусков (от А к В).

2. Велосипедист выехал из А в В и ехал с постоянной скоростью 20 *км/час*. Когда он проехал 40 *км*, его нагнал автокар, вышедший из А на 15 мин. позднее и шедший тоже, с постоян-

ной скоростью. После того, как велосипедист проехал ещё 25 *км*, он встретил автокар, уже возвращавшийся из В, где он стоял полчаса. Определить расстояние между А и В.

3. Студенты взяли на лодочной станции напрокат лодку. Сначала они спустились на 20 *км* вниз по течению реки, затем повернули обратно и вернулись на лодочную станцию, затратив на всё 7 час. На обратном пути, на расстоянии 12 *км* от лодочной станции, они встретили плот, проплывший мимо лодочной станции как раз в тот момент, когда они отправились на прогулку. Определить, с какой скоростью двигалась лодка вниз по течению реки и какова скорость течения.

4. Два курьера одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов А и В. Если бы первый вышел на 1 час раньше, а второй на полчаса позже, они бы встретились на 18 мин. раньше. Если бы первый вышел на полчаса позже, а второй на 1 час раньше, то место их встречи передвинулось бы на 5600 *м*. Каковы скорости курьеров?

5. При стрельбе в мишень, находящуюся на расстоянии d от стрелка, наблюдатель, находящийся на расстоянии r_1 от мишени и r_2 от стрелка, слышит одновременно и звук выстрела и звук попадания пули в цель. Определить среднюю скорость полёта пули.

6. В два сосуда А и В одинакового веса налита вода, причём вес сосуда А с водой составляет $\frac{4}{5}$ веса сосуда В с водой. Если содержимое сосуда В перелить в сосуд А, то вес последнего вместе с водой превысит вес сосуда В в 8 раз. Найти вес каждого сосуда и количество воды в каждом из них, зная, что в сосуде В содержится на 50 *г* больше воды, нежели в сосуде А.

7. На одной из станций московского метро человек пробежал по ступеням поднимающегося эскалатора до высоты 10 *м* и обратно, употребив на это 73 сек. В другой раз он проделал то же самое на спускающемся эскалаторе и израсходовал на весь пробег туда и обратно 2 мин. 26 сек. Найти собственную скорость подъёма и спуска эскалатора, если известно, что вниз по его ступеням человек сбегал на 35% быстрее, нежели вверх.

8. Куплено три отреза А, В и С материи одинакового качества. А и В имеют одинаковую длину, В и С — одинаковую ширину. Общая длина всех отрезов 110 *м*, ширина — 3,15 *м*. Стоимость отрезов пропорциональна числам 5,6 и 8, а их общая стоимость равна 185 руб. Найти длину, ширину и стоимость каждого отреза.

9. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно полу-

чить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

10. Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить эту работу за 24 часа, если бы делали её все одновременно. Вместо этого они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый работал до окончания всей работы. Сколько времени они рыли канаву, если первый приступивший к работе проработал в 5 раз больше времени, чем последний?

11. Имеется некоторое количество равных шаров. Их можно уложить в виде квадрата или же в виде правильного треугольника. Найти число этих шаров, если известно, что при треугольном их расположении в стороне треугольника будет на 2 шара больше, чем в стороне квадрата при квадратном их расположении.

12. Часы показывают в некоторый момент на 2 минуты меньше, чем следует, хотя и идут вперед. Если бы они показывали на 3 минуты меньше, чем следует, но уходили бы в сутки вперед на 0,5 минуты больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки эти часы спешат?

13. Найти четырёхзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что искомое, но в обратном порядке.

14. Бак объёмом 425 $м^3$ наполнился водой из двух кранов, причём первый кран был открыт на 5 часов дольше второго. Сколько времени был открыт второй кран, если известно: 1) что, если первый кран был бы открыт столько времени, сколько на самом деле был открыт второй, а второй кран был бы открыт столько времени, сколько был открыт первый, то из первого крана вытекало бы вдвое меньше воды, чем из второго; 2) что, если открыть оба крана одновременно, то бак наполнится через 17 часов.

§ 9. Квадратные уравнения. Уравнения высших степеней. Дробные уравнения. Иррациональные уравнения в действительной области.

Решить уравнения:

1. $ab \cdot x^2 = x \cdot (a + b) - 1.$
2. $ad \cdot x^2 + (cd - ab)\, x - bc = 0$

3. Доказать, что если a, b и c — стороны треугольника, то корни уравнения:

$$b^2 \cdot x^2 + (b^2 + c^2 - a^2) \cdot x + c^2 = 0$$

будут мнимыми.

4. Доказать, что если m и n — корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, а k и l — корни уравнения $x^2 + bx + 1 = 0$, то

$$(m - k)(n - k)(m + l)(n + l) = b^2 - a^2 .$$

5. Найти целые значения a, при которых уравнение:

$$x^2 + ax - 3a = 0$$

имеет целые корни.

6. Доказать, что ни при каком целом положительном x выражение:

$$x^2 + 3x + 5$$

не делится на 121.

7. Доказать, что уравнение:

$$x^2 + ax + b = 0$$

не имеет рациональных корней, если a и b — нечётные целые числа.

8. Доказать, что неделимость натурального числа n на 3 есть необходимый и достаточный признак того, что корни уравнения:

$$x^2 + 2^n x + 4^n = 0$$

являются n-ми степенями корней уравнения:

$$y^2 + 2y + 4 = 0 .$$

9. Показать, что уравнение:

$$(a^2 + b^2 + c^2) x^2 + 2(a + b + c) x + 3 = 0$$

не может иметь действительных корней, если a, b и c не равны между собой. Обобщить теорему.

10. Не решая уравнения $x^2 + ax + b = 0$, составить уравнение, имеющее корнями:

$$1)\ y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, \qquad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2};$$

$$2)\ y_1 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}, \qquad y_2 = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1},$$

где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

11. Не решая уравнения: $2x^2 - 7x + 3 = 0$, составить такое возвратное уравнение четвёртой степени, чтобы два его корня равнялись корням данного уравнения.

12. Зная, что уравнения:

$$2x^2 - ax + 3 = 0 \quad \text{и} \quad 4x^2 - 4(a - 3)x + 3 = 0$$

имеют общий корень, найти значение a.

13. Решить уравнения:

$$2x^3 + 5x^2 - 5x - 12 = 0 \text{ и } 4x^3 + 4x^2 + x + 6 = 0,$$

зная, что они имеют один общий корень.

14. Найти сумму девятых степеней корней уравнения: $x^3 + 3x + 9 = 0$, пользуясь теоремой Вьета:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = 3, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -9.$$

15. Найти сумму шестнадцатых степеней корней уравнения: $x^3 - x + 1 = 0$, пользуясь теоремой Вьета.

16. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составить новое уравнение, корнями которого были бы числа

$$y_1 = x_2 x_3, \ y_2 = x_3 x_1, \ y_3 = x_1 x_2.$$

17. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Составить новое уравнение, корнями которого были бы числа

$$y_1 = x_2 + x_3, \ y_2 = x_3 + x_1, \ y_3 = x_1 + x_2.$$

18. Решить уравнение:

$$x^3 + ax + b = 0,$$

если $a^3 = 27(b + 1)$.

19. Решить уравнение:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

коэффициенты которого связаны равенствами:

$$a + b = b + c + d = d + e.$$

20. Показать, что уравнение:

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + n = 0$$

не может иметь рациональных корней, если n — простое.

21. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения n-ой степени:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

то данное уравнение можно представить в виде:

$$a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0.$$

Доказать, опираясь на этот факт, теорему Вьета в общем виде:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$S_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$S_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0},$$

где S_k — сумма произведений корней данного уравнения, взятых по k. Дать словесную формулировку общей теоремы Вьета.

22. При каких значениях a уравнение

$$x^5 - 5x + a = 0$$

имеет два равных кория?

23. Доказать, что уравнение:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

всегда имеет действительные корни.

Решить следующие уравнения (24 — 71).

24. $(x^2 + ax)^2 + m(x^2 + ax) + n = 0$.

25. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$.

26. $x^4 - 2(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 + b^2)^2 = 0$.

27. $x^3 - (a+2)x + \sqrt{a+1} = 0$.

28. $8x^3 + 16x = 9.$
29. $x^3 - 4x^2 + 3x + 2(x - 1) = 0.$
30. $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0.$
31. $x^3 - x^2 + x - a^3 - 2a^2 - 2a - 1 = 0.$
32. $x^3 + (a^2 - 2)x = 2ax^2 - 2a.$
33. $x^3 + 9x^2 - 33x + 27 = 0.$
34. $x^3 + 2ax^2 + (a^2 + 2)x + 2a = 0.$
35. $x^3 + 6x = 36\sqrt{3}.$
36. $x^3 - (a + \sqrt{a})x + a = 0.$
37. $(\sqrt{2} - 1)x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + 2x - 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 0.$
38. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8x - 12 = 0.$
39. $x^4 - 2x^3 + x - a = 0.$
40. $x^4 + 4x^2 + 9x - 14 = 0.$
41. $x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 4 = 0.$
42. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3 = 0.$
43. $x^4 - 12x + 323 = 0.$
44. $x^4 + x^3 + (\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 2 = 0.$
45. $x^4 - 2x^3 + x + 0{,}25 = 0.$
46. $x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 92x + 60 = 0.$
47. $4x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 6x - 15 = 0.$
48. $x^4 + 5x - 6 = 0.$
49. $x^4 - 8x + 63 = 0.$
50. $(x^2 - 6x + 10) \cdot (x^2 - 8x + 17) = 26.$
51. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x - 14 = 0.$
52. $(x - a)^4 + (x - b)^4 = a^4 + b^4.$
53. $x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 5x - 6 = 0.$
54. $(x^2 + ax)^2 + (ax + a^2)^2 + a^2x^2 = b^4.$
55. $x^4 - 2(\sqrt{3} + 1)x^2 + 16x - 12 - 2\sqrt{3} = 0.$
56. $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 3.$
57. $x^5 + x^2 + 2x + 2 = 0.$
58. $ax^5 + (b - ac)x^4 - bc\,x^3 - bx^2 + (bc - a)x + ac = 0.$
59. $x^6 + 3x^5 + x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 5x + 8 = 0.$
60. $x^6 - 6x^4 + x^3 + 9x^2 - 3x - 1 = 0.$
61. $x^6 - 6x^5 + 79x^4 - 213x^3 - 134x^2 - 219x + 72 = 0.$
62. $(x - 1)x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 16 = 0.$

63. $x^6 + ax^3 - b^2x^2 + \frac{a^2}{4} = 0.$

64. $(1 + x)^7 + (1 - x)^7 = 128.$

65. $x^6 + 2ax^4 + a^2x^2 + \frac{4a^3}{27} = 0.$

66. $64x^6 + 96x^4 - 64x^3 - 12x + 7 = 0.$

67. $(x - 4)^3 (x - 5)^3 + 2 (x - 5)^3 + (x - 4)^3 = 0.$

68. $(x + 1)^6 + (x - 1)^6 = a (x^6 + 1).$

69. $(x + a)^6 + (x - a)^6 = 64a^6.$

70. $(4x^4 + 2a^2x^2 - 3a^4)^2 + (4x^4 - 2a^2x^2 - 3a^4)^2 + 16a^4x^4 - 16x^8 = b^8.$

71. $a (a + 2x)^3 + x (x - a)^3 - a (a + x)^3 = 2a^2x (3x - a)$

Решить дробные уравнения (72—82).

72. $\frac{ab}{x-a} + \frac{ax}{x-b} + b = 0.$

73. $\frac{a+x}{ax^2} = \frac{1}{ax-x} + \frac{1}{a^2-a}.$

74. $\frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1.$

75. $\frac{x^2}{(x+1)^2} + x^2 = 1.$

76. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = n (n - 1).$

77. $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+x}.$

78. $\frac{4}{3 (x-2)} + \frac{1}{6x-4} + \frac{6}{10-15x} = 0{,}33.$

79. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+7} = 0.$

80. $\dfrac{x^2-2x-3}{15}+\dfrac{9}{x^2-18x+77}=0.$

81. $\dfrac{x^{10}+a^5x^5+a^{10}}{x^2+ax+a^2}=(x^2+a^2)(x-a)^2a^4+a^4x^4.$

82. $\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0.$

Решить иррациональные уравнения (83—116).

83. $\dfrac{x+11}{2}=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x-1}}.$

84. $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}.$

85. $\dfrac{1-ax}{1+ax}=\sqrt{\dfrac{1-2ax}{1+2ax}}.$

86. $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\sqrt{\dfrac{1}{a^2x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}.$

87. $\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}}.$

88. $\sqrt{a+x}-\dfrac{a}{\sqrt{a+x}}=\sqrt{2a+x}.$

89. $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}.$

90. $x-\sqrt[3]{150x}=150.$

91. $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x+1}}+\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x^2+1}}=\dfrac{10}{3}.$

92. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}.$

93. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$

94. $8\sqrt[3]{x+1}=\dfrac{32x+31}{2x+3\sqrt[3]{x+1}+1}$.

95. $\sqrt{x-2}=\dfrac{5x^2-10x+1}{x^2+6x-11}$.

96. $x^2-4x\sqrt{x+1}+8x-8\sqrt{x+1}+8=0$.

97. $x-2\sqrt{x\sqrt{x-1}+2}+2=0$.

98. $8\sqrt{x^2-9}=\dfrac{x^4+6x^2-119}{x^2-5}$.

99. $x^2+2\sqrt{x^2+6x}=24-6x$.

100. $9x^4-12x^2+\sqrt{4-3x^2}+2=0$.

101. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

102. $\sqrt{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}+\sqrt{84-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=18$.

103. $\sqrt[4]{1300-x}+\sqrt[4]{x+12}=8$.

104. $\sqrt{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}-\sqrt{19-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=5$.

105. $\sqrt[4]{41+\sqrt{x}}-\sqrt[4]{41-\sqrt{x}}=2$.

106. $x^2+x+\sqrt{x^2+x+1}=1$.

107. $\sqrt{\dfrac{x^2+8x}{x+1}}+\sqrt{x+7}=\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$.

108. $x^2-8(x+3)\sqrt{x-1}+22x=7$.

109. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

110. $\sqrt{x^2-x-6}-\sqrt{x^2-9x+18}=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$.

111. $\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{7}{x+2}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$.

112. $x^3+4x\sqrt{x-1}\,(x-1)+3x^2-8x+4=0$.

113. $\sqrt[5]{138+5x}+\sqrt[5]{137-5x}=5$.

114. $\sqrt{3x^2-10x+8}-\sqrt{6x^2+17x-32}=\sqrt{18x^2-24x}$

115. $\left(\sqrt[m]{x}+\sqrt[n]{x}\right)^2=4a^2\sqrt[mn]{x^{m+n}}$, $(m\neq n)$.

116. $\sqrt{x^2+x+2+2\sqrt{x(x+1)+1}}-$

$$-\sqrt{x^2+x+2-2\sqrt{x(x+1)+1}}=2.$$

§ 10. Системы уравнений.

а) Решить системы уравнений (1—67).

1. $x+y+z=1,$
   $ax+by+cz=1,$
   $a^2x+b^2y+c^2z=1,\ (a\neq b\neq c).$
2. $x-ay+a^2z=a^3,$
   $x-by+b^2z=b^3,$
   $x-cy+c^2z=c^3.$
3. $-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=2,$
   $x_1-3x_2+x_3+\ldots+x_n=4,$
   $x_1+x_2-7x_3+\ldots+x_n=8,$
   $-\ .\ -\ .\ -\ .\ -\ .\ -\ .\ -\ .\ -$
   $x_1+x_2+x_3+\ldots-(2^n-1)\,x_n=2^n.$
4. $x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n=1,$
   $nx_1+x_2+2x_3+\ldots+(n-1)\,x_n=2,$

$(n-1)\,x_1 + nx_2 + x_3 + \ldots + (n-2)\,x_n = 3,$

. . . . . .

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \ldots + 1\,x_n = n.$

5. $\dfrac{x+y-z}{5} = \dfrac{y+z-x}{7} = \dfrac{z+x-y}{11} = \dfrac{xyz}{3}$.

6. $xy = 3z,$
   $yz = 2x,$
   $zx = y.$

7. $x^2 + y^2 = axy,$
   $x^4 + y^4 = bx^2y^2.$

8. $x^2 + y^2 = 5,$
   $x^3 + y^3 = 9.$

9. $x^2 - 2xy = -3,$
   $6x^2 - 11y^2 = 10.$

10. $(x-y)\,(x^2-y^2) = a;\ (x+y)\,(x^2+y^2) = b;\ (b \neq 0).$

11. $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 353,$
    $xy\,(x^2+y^2) = 68.$

12. $x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13,$
    $x^2 + 2xy - y^2 = 1.$

13. $x\,(x+1)\,(3x+5y) = 144,$
    $x^2 + 4x + 5y = 24.$

14. $(x^2+1)\,(y^2+1) = 10,$
    $(x+y)(xy-1) = 3.$

15. $3x + xy - y^2 - 3y = 0,$
    $x^2 - 5x + 2y^2 - 12 = 0.$

16. $x^2\,(x+1) + y^2\,(y+1) = 48;$
    $x^2\,(x-1) + y^2\,(y-1) = 22.$

17. $x^3 + y\,(xy-1) = 0,$
    $y^3 - x\,(xy+1) = 0.$

18. $x + y = 4,$
    $(x^2+y^2)\,(x^3+y^3) = 280.$

19. $(x+y)(x^2-y^2)=9,$
$(x-y)(x^2+y^2)=5.$

20. $xy=225,$
$(x-15)(y+1)=320.$

21. $x^4+4y^4=a,$
$x^2+2xy+2y^2=b.$

22. $x^3+y^3=a^3,$
$x^2y+xy^2=b^3.$

23. $x^3-y^3=19(x-y),$
$x^3+y^3=7(x+y).$

24. $x^3-y^3=26,$
$x^2y-xy^2=6.$

25. $x^2+y^2=65,$
$xy=28.$

26. $x+y=a,$
$x^5+y^5=a^5.$

27. $x^2+xy+y^2=a^2,$
$x+xy+y=b.$

28. $x(x^2+y^2)=6y,$
$y(x^2-y^2)=x.$

29. $xy=(a-b)(x-y),$
$ab(x+y)^2=(a^2-b^2)(bx-ay).$

30. $x^6+y^6=a^6,$
$x+y=a.$

31. $x^2y+xy^2=30,$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=36.$

32. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12;\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}.$

33. $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=0{,}375,$
$2y=x+1.$

34. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a+b-\dfrac{ab}{a+b}}{a-b+\dfrac{ab}{a-b}}$; $x+y=2a^3$

35. $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2}{2x+3y}=7,$

$\dfrac{3}{x-y}-\dfrac{4}{2x+3y}=16.$

36. $x^2+yz=a,$
$y^2+zx=b,$
$z^2-xy=c,\ (a^2\neq bc).$

37. $x^2+(y-z)^2=a,$
$y^2+(z-x)^2=b,$
$z^2+(x-y)^2=c.$

38. $xy+yz+zx=47,$
$x^2+y^2=z^2,$
$(z-x)(z-y)=2.$

39. $x+y+z=a,$
$x^2+y^2+z^2=a^2,$
$xy+yz=0;\ (a\neq 0).$

40. $xy(x+y-z)=6,$
$yz(y+z-x)=60,$
$zx(z+x-y)=24.$

41. $xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)=$
$=c(xy-xz-yz).$

42. $x^3+y^3+c^3=3cxy,$
$y^3+z^3+a^3=3ayz,$
$z^3+x^3+b^3=3bzx.$

43. $x^3+y^3+3x(x+1)+3y(y+1)=2c,$
$y^3+z^3+3y(y+1)+3z(z+1)=2a,$
$z^3+x^3+3z(z+1)+3x(x+1)=2b.$

44. $x^2+xy+xz+yz=a,$
$y^2+xy+xz+yz=b,$

$z^2 + xy + xz + yz = c.$

$(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0).$

45. $x(y+z) = a^2,$

$y(z+x) = b^2,$

$z(x+y) = c^2.$

46. $y + 2x + z = a(x+y)(x+z),$

$z + 2y + x = b(y+z)(y+x),$

$x + 2z + y = c(z+x)(z+y).$

47. $x + y + z = a,$

$xy + yz + xz = a^2,$

$xyz = a^3;\ (a \neq 0).$

48. $x + y + z = a,$

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$

$x^3 + y^3 + z^3 = a^3;\ (a \neq 0).$

49. $(x - y + a^2 - b^2)^2 = 4c^2z,$

$(y - z + b^2 - c^2)^2 = 4a^2x,$

$(z - x + c^2 - a^2)^2 = 4b^2y.$

50. $a^2x^2(y-z)^2 = (a^2 - x^2)\,y^2z^2,$

$b^2y^2(z-x)^2 = (b^2 - y^2)\,z^2x^2,$

$c^2z^2(x-y)^2 = (c^2 - z^2)x^2y^2.$

$(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0).$

51. $(y+z)^2 - x^2 = a^2,$

$(z+x)^2 - y^2 = b^2,$

$(x+y)^2 - z^2 = c^2,\ (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0).$

52. $a(x+y-z) = x(y-z),$

$b(y+z-x) = y(z-x),$

$(a+b)(z+x-y) = z(x-y),\ (a \neq 0,\ b \neq 0).$

53. $x^2 + y^2 - z(x+y) = 2c,$

$y^2 + z^2 - x(y+z) = 2a,$

$z^2 + x^2 - y(z+x) = 2b.$

54. $x - y + z = 0,$

$xz - xy - yz = -7,$

$xyz = 6.$

55. $xyz = 2(xy + yz + zx),$
$3xyz = 2(yz - zx - xy),$
$3xz = 2(x + z).$

56. $x^2 - y^2 = z^2,$
$(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = 576,$
$y - z = 1.$

57. $3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = 11a^3,$
$x + y + z = 2a,$
$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$

58. $x + y + z = 2a,$
$x - y + z = 2c,$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b}, \quad (a + b \neq c).$

59. $\frac{a}{x - a} = \frac{b}{y - b} = \frac{c}{z - c},$
$ax + by + cz = d^2, \ (a \neq 0, \ b \neq 0, \ c \neq 0).$

60. $x\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) = 2a,$
$y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = 2b,$
$z\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 2c.$

61. $x + y - z = 1,$
$xz + yz = 1,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 1.$

62. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y + z} = \frac{1}{a},$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z + x} = \frac{1}{b},$
$\frac{1}{z} + \frac{1}{x + y} = \frac{1}{c}.$

63. $x + z = -2,$
$y + u + xz = 5,$
$yz + xu = -4,$
$yu = 4.$

64. $x + y + z + u = 10,$
$xy + yu + zx + zu = 25,$
$xy + yz + zu + ux = 21,$
$uy + yz + zx + ux = 16.$

65. $x^4 + a = y^4 + b = z^4 + c = u^4 + d = xyzu,$
при условии, что $a + b + c + d = 0.$

66. $x_2x_3 \ldots x_n = a_1x_1,$
$x_3x_4 \ldots x_n x_1 = a_2x_2,$
. . . . . .
$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} = a_n x_n,$ $(a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0\ , \ldots,\ a_n \neq 0).$

67. $(x_1 + 2x_2 + 3x_2 + \ldots + nx_n)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k = n,$
$(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \ldots + x_n)(x_1 + x_2 + \ldots +$
$+ x_n) = n - 1,$
. . . . . .
$[(n-1)x_1 + nx_2 + x_3 + \ldots + (n-2)x_n](x_1 + x_2 +$
$+ \ldots + x_n) = 2,$
$[nx_1 + x_2 + 2x_3 + \ldots + (n-1)x_n](x_1 + x_2 +$
$+ \ldots + x_n) = 1.$

б) Решить системы иррациональных уравнений (68—77).

68. $\sqrt{ax} + \sqrt{by} = \dfrac{x+y}{2} = a + b;\quad (a > b > 0).$

69. $25x - 16y - 8\sqrt{y-1} = 10,$
$49x - 25y - 28\sqrt{x-1} = 20.$

70. $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341,$
$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330.$

71. $x^2 + y\sqrt{xy} = 420,$
$y^2 + y\sqrt{xy} = 280.$

72. $x^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 17,$

$y^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 68.$

73. $a\sqrt{(x-y+z)(x+y-z)} = x\sqrt{yz},$

$b\sqrt{(-x+y+z)(x+y-z)} = y\sqrt{zx},$

$c\sqrt{(-x+y+z)(x-y+z)} = z\sqrt{xy};$

$(a>0,\ b>0,\ c>0).$

74. $x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{12}{x-y},$

$xy = 15.$

75. $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{17}{4},$

$x(x+y) + \sqrt{x^2+xy+4} = 52.$

76. $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a,$

$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2.$

77. $x - y = \frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}\right),$

$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3.$

* * *

78. Показать, что система уравнений:

$$x(ax+by+c) = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y(ax+by+c) = a_2x + b_2y + c_2$$

имеет три решения.

79. Показать, что если a, b, c и d — различные действительные числа и (x_0, y_0, z_0) — решение системы уравнений:

$$x + y + z = -1,$$
$$bx + cy + dz = -a,$$
$$b^2x + c^2y + d^2z = -a^2,$$

то $x_0y_0z_0 > 0$.

80. Показать, что единственным решением однородной системы:

$$2x + y + z = 0,$$
$$yz + zx + xy - y^2 = 0$$
$$xy + z^2 = 0$$

является нулевое решение: $x = y = z = 0$.

81. Показать, что сумма значений неизвестных $x + y$ системы:

$$x + y + \sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} = a,$$
$$x^2 + y^2 + xy - \frac{1}{xy} = b + 2$$

всегда вещественна при любых вещественных a и b и $a \neq 0$.

§ 11. Исторические задачи на уравнения и системы уравнений.

Задачи знаменитого греческого математика Диофанта Александрийского (II — III в. н. э.).

1. Число 100 разделить два раза так, чтобы большая часть от первого деления была вдвое более меньшей части от второго деления, и чтобы большая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.

2. Найти два числа, отношение которых 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5.

3. Найти три числа, если дано, что произведение суммы первых двух на третье есть 35, суммы первого с третьим на второе 27, а сумма второго с третьим на первое равно 32.

4. Найти три числа так, чтобы произведение любой пары их, увеличенное их суммой, равнялось бы соответственно 8, 15 и 24.

5. Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из них, составит куб некоторого числа.

6. Найти три числа так, чтобы сумма всех трёх и каждых двух были квадратами.

7. **Задача индусского математика Сридхары (около VII в.).** Пятая часть пчелиного роя сидит на цветке кадамба, одна треть — на цветках силиндха. Утроенная разность последних двух чисел направилась к цветам кутая. И осталась ещё одна пчела, летающая взад и вперёд, привлечённая чудесным ароматом жасмина и пандануса. Скажи мне, очаровательная, сколько всех пчёл? (Из трактата „Сущность вычисления").

Задачи из трактата „Всё известное в арифметике" арабского математика Аль-Кархи (XI в.).

8. На двух противоположных берегах реки стоит по одной пальме. Вышина одной 20 локтей, другой—30. Ширина реки 50 локтей. На вершине каждой из пальм сидит по одной птице. Обе птицы видят в реке рыбу и летят по прямой линии к ней, одновременно достигая поверхности воды в точке на прямой, соединяющей корни пальм. Определить длину путей, которые пролетели птицы, и место их встречи.

9. Решить систему:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$xz = y^2,$$
$$xy = 10.$$

10. Задача арабского математика Ал-Кухи (Хв.). Разделить 10 на такие две части, чтобы сумма, составленная из суммы квадратов этих частей и частного от деления бóльшей части на меньшую, давала 72.

Задачи Леонардо Фибоначчи Пизанского (XII в.).

Решить уравнения:

11. $3x + 4\sqrt{x^2+3x} = 20$.

12. $3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4$.

13. $x + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{5x^2} = 10$.

Задачи из трактата „Венец астрономического учения" индийского математика Бхаскара-Акариа (XII в.).

14. Некто сказал своему другу: „Дай мне 100 рупий и я

уду вдвое богаче". На что последний ответил: „Если ты мне дашь только 10 рупий, я стану вшестеро богаче тебя". Спрашивается: сколько было у каждого?

15. Стая обезьян забавлялась. Квадрат одной восьмой их части резвился в лесу. Остальные 12 кричали на вершине холма. Скажи мне: сколько всех обезьян?

16. Корень квадратный из половины пчелиного роя полетел к кусту жасмина. Восемь девятых роя остались дома. Одна пчела полетела за трутнем, обеспокоенная его жужжанием в цветке лотоса, куда он попал вечером, привлечённый приятным ароматом, и не может оттуда выбраться, так как цветок закрылся. Скажи мне число пчёл роя.

17. Найти число, обладающее тем свойством, что оно, будучи умножено на 12, по прибавлении к своему кубу равняется ушестерённому квадрату самого себя, увеличенному тридцатью пятью.

18. Решить уравнение:

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9\,999.$$

19. Задача итальянского математика Лука Пачиоло (1445 — 1514?). Решить уравнение:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 81\,600 = 0.$$

20. Задача известного немецкого математика Адама Ризе (1492 – 1559). Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: „Дайте мне по одной трети ваших денег и я приобрету лошадь". Наконец, третий говорит первым двум: „Дайте мне только по четверти ваших денег, и лошадь будет моя". Теперь спрашивается, сколько денег было у каждого?

21. Задача знаменитого французского математика Франсуа Вьета (1540 — 1603). Если дано кубическое уравнение:

$$x^3 - (a + b + c)\,x^2 + (ab + bc + ca)\,x = abc,$$

то a, b и c — корни этого уравнения. Доказать.

Задачи голландского инженера С. Стевина (1548 — 1620).

22. Решить уравнения:

$$1)\ x^9 = 3x^6 + 5x^3; \qquad 2)\ x^3 = 6x + 40.$$

Задачи великого французского математика и философа Рене Декарта (1596 — 1650)

23. Решить уравнения:

$$1)\ x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0;$$
$$2)\ x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0;$$
$$3)\ x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

24. Задачи немецкого математика К. Рудольфа (XVI в.). Решить системы:

$$1)\ \begin{cases}(x+y)(x^2+y^2) = 539\,200,\\ (x-y)(x^2-y^2) = 78\,400.\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}(x+y)(x^2-y^2) = 675,\\ (x-y)(x^2+y^2) = 351.\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} xy + x + y = 573,\\ x^2 + y^2 - x - y = 1716.\end{cases}$$

25. Задача датского математика Э. Бартолина (1625 — 1698). Решить уравнение:

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3a^2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-3a^2} = \sqrt{\frac{ax^2}{b}}.$$

26. Задача известного французского математика А. Моавра (1667—1754). Показать, что всякое возвратное уравнение нечётной степени имеет корень -1 и при почленном делении обеих частей на $x+1$ даёт опять-таки уравнение возвратное степени на единицу ниже.

27. Задача французского математика А. Рейно (XVIII век). Некто, умирая, оставил завещание, согласно которому старший сын получает из полного наследства 100 франков и десятую часть остатка, второй — 200 франков и десятую часть нового остатка, третий — 300 франков и десятую часть нового остатка, и так далее до последнего. При этом доли всех сыновей должны быть равными. Найти размер оставленного наследства, число сыновей и долю каждого.

Задачи известного английского математика Маклорена (1698 — 1746).

28. Несколько человек обедали вместе и по счёту должны уплатить 175 шиллингов. Оказалось, что у двоих не было при себе денег, поэтому каждому из них приходилось уплатить на 10

шиллингов больше, чем приходилось на их долю. Сколько человек обедало?

29. Решить систему:

$$x + y + z = 26,$$
$$x - y = 4,$$
$$x - z = 6.$$

30. Задача известного французского математика Э. Безу́ (1730 — 1783). Некто купил лошадь и, спустя некоторое время, продал её за 24 пистоля. При этом теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он её купил?

Задачи французского математика Монферрье́ (XIX в.).

Решить уравнения:

31. $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 35x - 28 = 0.$

32. $x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0.$

33. Задача французского астронома Ж. Бинэ (1786—1856). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0. \end{cases}$$

34. **Задача Бурдона.** Число состоит из трёх цифр; сумма этих цифр равна 11; цифра единиц вдвое больше цифры сотен. Если прибавить к искомому числу 297, то получается число, написанное теми же цифрами, как у искомого, но в обратном порядке Какое число имеет эти свойства?

35. **Задачи Бертрана.** Решить уравнения:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x}}$;

2) $\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}.$

36. Задача французского математика Е. Желена (XIX в.). Пять разбойников отняли у прохожего кошелёк, наполненный

дукатами. Самый сильный из них взял 81 дукат, каждый из 4 остальных — неодинаковую сумму. Вследствие неравного раздела возник спор, и пришедший в то время атаман приказал, чтобы тот, кто взял больше всех, удвоил каждому из остальных число его дукатов и чтобы то же самое сделал затем захвативший второе по величине количество дукатов, потом захвативший третье, четвёртое и пятое. В результате оказалось, что каждый из 5 разбойников получил одно и то же число дукатов. Узнать, сколько дукатов было в кошельке и сколько из них каждый захватил вначале.

37. Задача известного швейцарского математика Я. Штурма (1803 — 1855). Из А выезжает курьер и в первый день проезжает 10 льё, а в каждый следующий — на $\frac{1}{4}$ льё больше. Спустя три дня другой курьер выезжает из города В, расположенного за городом А в 40 льё, и едет в том же направлении, причём в первый день проезжает 7 льё, а в каждый следующий — на $\frac{2}{5}$ льё больше. Через сколько дней после выезда первого оба курьера встретятся?

38. Задача известного немецкого математика О. Шлёмильха (1823 — 1901). Решить кубическое уравнение: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, если корни его составляют:

1) арифметическую прогрессию; 2) геометрическую прогрессию; 3) гармонический ряд. (Под гармоническим рядом имеется в виду соотношение: $x_2 = \frac{2x_1x_3}{x_1 + x_3}$).

§ 12. Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения.

1. Не пользуясь таблицами логарифмов, вычислить с точностью до 0,01: $\lg 2$, $\lg 3$, $\lg 7$.

2. Найти основание системы логарифмов, при котором логарифм натурального числа a равен самому числу a.

3. Доказать, что если a и b катеты, c — гипотенуза треугольника, то

$$\lg_{c+b} a + \lg_{c-b} a = 2 \lg_{c+b} a \cdot \lg_{c-b} a.$$

4. Доказать равенства:

1) $\lg 2 = \lg_3 2 \cdot \lg_4 3 \cdot \lg_5 4 \cdots \lg_9 8 \cdot \lg 9$;

2) $\lg_2 10 = \lg_2 3 \cdot \lg_3 4 \cdot \lg_4 5 \cdots \lg_8 9 \cdot \lg_9 10$.

5. Доказать тождества:

1) $\lg_{ab} x = \frac{\lg_a x \cdot \lg_b x}{\lg_a x + \lg_b x}$.

2) $\lg_a x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\lg_{a_1} x} + \dfrac{1}{\lg_{a_2} x} + \cdots + \dfrac{1}{\lg_{a_к} x}}$

($a = a_1 \cdot a_2 \cdots a_к$, все $a_1, a_2, \cdots, a_к$ — положительные и не равны 1).

3) $\lg_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \cdot \lg_a x$;

4) $\lg_{\sqrt[к]{a}} x = к \cdot \lg_a x$;

5) $\lg_a x \cdot \lg_b x + \lg_b x \cdot \lg_c x + \lg_c x \cdot \lg_a x = \dfrac{\lg_a x \cdot \lg_b x \cdot \lg_c x}{\lg_{abc} x}$.

6) Решить показательные уравнения:

1) $2^{x+3} - 2^x = 112$;

2) $6^x + 4^x = 9^x$.

3) $3^x \cdot 2^{x-1} - 3^{x-1} \cdot 2^x = 72$.

4) $3^{x^2} \cdot (9^{x+1} - 1) = 3^x \cdot 6552$.

5) $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992$.

6) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 9^x + 9^{x-1} + 9^{x-2}$.

7) $4^{x^2-1{,}25x-0{,}25} = \sqrt{2}$.

8) $4^x - 3^{x-0{,}5} = 3^{x+0{,}5} - 2^{2x-1}$.

7. Решить логарифмические уравнения:

1) $\lg(x+6) - \dfrac{1}{2}\lg(2x-3) = \lg\dfrac{100}{2x-3}$;

2) $\lg_3 x + \lg_9 5 = 1$.

3) $\lg 3 \cdot \lg_3 10^{\sqrt{x+2}} = x - 4$;

4) $\lg_3 x + \lg_x 3 - 2\lg_3 x \cdot \lg_x 3 = \dfrac{1}{2}$.

5) $2\lg_x a + \lg_{ax} a + 3\lg_{a^2 x} a = 0$.

6) $\lg\sqrt{5x-4} + \lg\sqrt{x+1} = 2 + \lg 0{,}18$.

8. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} (1+y)^x = 100, \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = (y+1)^{-2} \cdot (y-1)2^x. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg_{0,5}(y-x) + \lg_2 \dfrac{1}{y} = -2, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ a^x = b^y. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^a = y^b \\ \lg \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lg x}{\lg y} \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5(\lg_y x + \lg_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

6) $\begin{cases} a^x = b^y, \\ \lg \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lg x}{\lg y}. \end{cases}$

9. **Задача Монферрье.** Решить уравнение:

$$a^{b^x} = c.$$

10. **Задача немецкого математика Бальтцера (XIX в.).** Решить уравнение:

$$x^{a + b \lg x} = c.$$

§ 13. Неопределённые уравнения.

Решить в целых числах уравнения:

1. $3x + 5y = 11.$
2. $4x - 11y = 5.$
3. $(x+y)^2 - (x+y) - 2x = 150.$

Выделить положительные решения.

4. $2x^2 + 4x = y^2 + 2.$
5. $x + y = x^2 - xy + y^2.$
6. $x^2 = y^3 + 1.$
7. $x^4 - 4x^3 + 8x + 4 = y^2.$
8. $x^4 + y^4 + 2 = 4xy.$

9. $x^8 - x^5 = y^5 \cdot z$, полагая y и z простыми числами.

10. $(x-1)! \cdot (x-y) = y^2$.

11. $\sqrt[3]{a\sqrt{x} + b\sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. ($a$ и b — целые, x и y — не квадраты).

12. $x^2 + y^2 = z^3$ и $x^m + y^m = z^n$, если m и n — взаимно простые.

13. $xy - 10(x+y) = 1$.

14. $x^2 - y^2 + 6y = 44$.

15. $(1 + 2 + \cdots + x) \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + x^2) = y^2$.

16. $x^2 + y^2 = (x+y) \cdot z$.

17. $yz(7x - 10) = 10 - 7(x+z)$.

18. $x^3 - 100 = 225y$.

19. $x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 + 6xy - 6y = 1$.

20. Решить в целых положительных числах уравнения:

1) $2^x + 1 = y^z$

2) $2^x - 3^y = 1$.

3) $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$.

Решить в целых числах системы уравнений:

21. $x + y = 2$; $xy + z^2 = 1$.

22. $\begin{cases} y + z - x = 3; \\ x^2 - y^2 - z^2 = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3\overline{xy} = \overline{zt} - 4; \\ x + y = z + t + 3; \\ x + y + z + t = \overline{xy} - 2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = z^2; \\ x^2 + 5y^2 = u^2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2 - ny^2 = z^2; \\ x^2 + ny^2 = u^2. \end{cases}$

26. Найти взаимно простые числа a и b так, чтобы

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}=\frac{8}{73}.$$

27. Решить в натуральных числах уравнения:

$$\sqrt{x-\frac{1}{5}}-\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}.$$

28. Доказать, что при любом натуральном n уравнение:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} y=1$$

имеет единственное решение в целых числах.

29. Показать, что уравнеиие

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$$

не имеет целых положительных решений.

30. Найти $\overline{abcd}=x^2$, если известно, что:

$$\begin{cases} a+b+c+d=\overline{ab}, \\ c+d=b. \end{cases}$$

31. Найти целое число x такое, что

$$1+2+\cdots+x$$

является трёхзиачным числом с одинаковыми цифрами.

32. Показать, что уравнение:

$$C_x^n+C_y^n=C_z^n$$

имеет решение.

33. Сколькими различными способами можно представить число 1000 в виде произведения трёх целых чисел.

34. Найти два трёхзначных числа, сумма которых кратна 504, а частное кратно 6.

35. Найти треугольник, стороны которого выражаются целыми числами, а площадь и сумма высот выражаются одним и тем же числом.

36. Найти вид двух дробей, сумма которых равна их произведению.

37. Найти две правильные несократимые дроби, произведение которых равняется $\frac{19}{23}$, зная, что числителями и знаменателями этих дробей служат четыре различных числа, дающие в сумме 808.

38. Найти трёхзначные числа, являющиеся квадратами трёх последовательных целых чисел, причём суммы цифр этих квадратов являются, в свою очередь, квадратами трёх последовательных целых чисел.

39. Если к четырёхзначному числу N слева приписать $2N+1$, то получится точный квадрат. Найти все числа, удовлетворяющие этому условию.

40. Найти четыре целых числа, образующие пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов — 11, а сумма квадратов всех чисел кратна 221.

41. Найти два натуральных числа, разность которых равна $\frac{1}{6}$ части их произведения.

42. Найти трёхзначные числа, любая степень которых оканчивается теми же цифрами и в том же порядке.

43. Найти число $\overline{abc}$, равное полусумме чисел $\overline{cab}$ и $\overline{bca}$.

44. Найти четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, если его первые две цифры одинаковы и две последние цифры одинаковы.

45. Найти все трёхзначные числа, кратные 13, и сумма цифр которых равна 13.

46. Найти четырёхзначное число $\overline{abcd}$, являющееся точным квадратом, такое, что если квадратный корень из него равен $\overline{mn}$, то

$$\overline{cd} = 1{,}5 \cdot \overline{mn}.$$

47. Найти двузначное число, куб суммы цифр которого равен его квадрату.

48. Найти двузначное число, разность кубов цифр которого равна удвоенному самому числу.

49. Найти двузначное число, равное удвоенному произведению своих цифр.

50. Найти четырёхзначные числа $\overline{abcd}$, являющиеся точны-

ми квадратами, для которых a, $\overline{cd}$ и $\overline{ad}$ также являются точными квадратами.

51. Найти четырёхзначное число, сумма цифр которого равна двузначному числу, выражаемому его первыми двумя цифрами.

52. Найти чётное число $\overline{abcd}$, цифры которого возрастают слева направо, притом такое, что если к нему прибавить число, составленное из тех же цифр в обратном порядке, то полученная сумма кратна 140.

53. Найти два целых числа, произведение которых — трёхзначное число, являющееся точным кубом натурального числа, а частное — квадрат.

54. Найти трёхзначное число, если известно, что: 1) приближённый квадратный корень из него по недостатку с точностью до целых равен 21; 2) при делении на сумму своих цифр в частном даёт 36, а в остатке цифру сотен.

55. Найти шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 даёт числа, составленные из тех же цифр, что и данное.

56. Определить число учащихся в каждом из первых трёх классов школы, если известно, что:

1) одиннадцатая степень числа учеников всех классов выражается числом из 22 цифр, а двенадцатая степень — числом из 23 цифр;

2) квадрат числа учеников первого класса равен числу, состоящему из трёх цифр, сумма которых равна 19;

3) сумма квадратов чисел учащихся второго и третьего классов равна 1466.

57. Доказать, что если стороны квадрата и стороны равновеликого прямоугольника выражаются целыми числами, то отношение периметров этих фигур не равно целому числу.

58. Найти прямоугольник, стороны которого целые числа, а площадь его численно равна учетверённой сумме основания, высоты и диагонали, измеренных в соответствующих линейных единицах.

59. Найти двузначные числа, кратные сумме факториалов своих цифр:

$$\overline{xy} = (x! + y!) \cdot k,$$

где $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$; $y! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots y$; k — натуральное число.

60. Решить систему:

$$2(x! + y!) = z!,$$
$$x + y = z.$$

61. **Задача Бхаскары.** Решить в рациональных числах уравнение:

$$ax + by + c = xy.$$

62. **Задачи Ал-кархи.** 1) Найти квадратное число, равное сумме квадратов двух других чисел. 2) Решить уравнение:

$$x^n + y^n = z^{n+1}.$$

63. **Задачи Алкуина.** 1) Разделить 100 мер пшеницы между 100 лицами так, чтобы каждый мужчина получил 3, каждая женщина 2, а каждое дитя $\frac{1}{2}$ меры. Сколько мужчин, женщин и детей? 2) Три наследника получили 21 бочку: 7 — полных, 7 — налитых до половины и 7 — пустых. Разделить наследство так, чтобы каждый из наследников получил столько же вина, сколько и бочек.

64. **Задача Леонардо Фибоначчи.** Некто купил 30 птиц за 30 монет. Из числа этих птиц за каждые 3 воробья заплачена одна монета, за каждые 2 горлицы — также одна монета и, наконец, за каждого голубя — по две монеты. Сколько было птиц каждой породы?

65. **Задача выдающегося немецкого математика Иоганна Мюллера (1436 — 1476), прозванного Регномонтаном.** Найти число, которое при делении на 17, 13 и 10 даёт соответственно остатки 15, 11 и 3. (Задача была предложена астроному Бианчини, который путём подбора нашёл два решения: 1 103 и 3 313. Регномонтан заметил, что 1 103 есть наименьшее такое число, а все остальные числа получаются прибавлением чисел, кратных $10 \cdot 13 \cdot 17 = 2210$).

66. **Задача из Мюнхенской рукописи Фредерича (XV в.).** Решить в целых числах систему уравнений:

$$43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31u + 17.$$

67. **Задача немецкого математика Бахвитца (XIX в.).** Показать, что всякое целое число, представляющее сумму трёх квадратов, может быть представлено в виде суммы квадратов четырёх дробей.

68. **Задача из „Сборника математических задач" (Англия, XIX в.).** Три крестьянина Джон, Питер и Алексис пришли на рынок со своими жёнами Мэри, Китти и Дженни. Узнать, кто на ком женат, если известно, что каждое из этих шести лиц заплатило за каждую купленную вещь столько пенсов, сколько вещей им куплено. Каждый мужчина истратил на 63 пенса больше своей жены. Кроме этого, Джон купил 23 вещами больше Китти, а Питер — 11 вещами больше Мэри.

69. **Задача французского математика Луи Бурдона (1799—1854).** Найти члены пропорции по известной сумме $2S$ крайних, сумме $2S_1$, средних и сумме квадратов $4c^2$ членов пропорции.

70. **Задача выдающегося французского математика В. А. Лебега (XIX в.).** Решить в целых числах систему уравнений:

$$2x + 3y + 7z = 131,$$
$$2x + 3y + 8z = 140.$$

71. Решить в целых числах неопределённое уравнение:

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^2 + v^2 + k^2 + t^2.$$

(из журнала „Mathesis").

§ 14. Доказательство неравенств. Средние величины.

а) О доказательстве неравенств. Доказать неравенство — это значит установить тождественность[1] данного неравенства при всех допустимых значениях его аргументов. Универсальных способов доказательства, применимых буквально к любым тождественным неравенствам, не существует. Метод доказательства, как правило, всегда зависит от структуры доказываемого неравенства. Наравне с некоторыми шаблонными методами встречается ряд довольно остроумных искусственных приёмов доказательства неравенств. Однако при всей своей изящности каждый искусственный приём имеет узкий круг применения.

До некоторой степени общими являются следующие методы.

1. **Аналитический метод.** Исходим из доказываемого неравенства и путём тождественных преобразований приводим его к очевидному или ранее уже доказанному неравенству.

Пример. Доказать, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел a и b больше их среднего геометрического:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \text{ если } a \neq b,\ a > o \text{ и } b > 0. \qquad (1)$$

[1]) Тождественными называются неравенства, справедливые при всех допустимых системах значений аргументов. Напр., неравенство $(a-b)^2 \geqslant 0$ справедливо при всех действительных значениях a и b. Неравенство $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$ справедливо при всех неравных действительных значениях a, b и c; и т. д.

Доказательство: 1) переносим члены в одну часть и выполняем вычитание:

$$\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}>0 \qquad (1')$$

Получили неравенство, равносильное (1).

2) Умножим обе части (1^1) на 2 и свернем числитель:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0 \qquad (2)$$

Это неравенство равносильно неравенствам (1) и (1′), в то же время оно очевидно, так как квадрат любого вещественного числа, не равного нулю, положителен.

Заключение: Неравенство (1) верно.

2. Синтетический метод. Здесь ход рассуждений обратный: исходим из очевидного неравенства и приводим его к доказываемому.

Пример. Доказать неравенство (1).

Доказательство: 1) Из условия следует, что $a\neq b$, $a>0$, $b>0$. Поэтому, очевидно,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0 \qquad (2)$$

или

$$a-2\sqrt{ab}+b>0.$$

2) Разделив обе части на 2, получим равносильное неравенство:

$$\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}>0 \qquad (1')$$

3) Разделим почленно на 2 и перенесём $\sqrt{ab}$ в правую часть:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>0,$$

Отсюда:

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \qquad (1)$$

Неравенство (1) доказано.

3. **Метод установления знака разности между обеими частями неравенства. Основан на свойстве неравенств:** если $A>B$, то $A-B>0$ и обратно, если $A-B>0$, то $A>B$ (для случая знака „меньше“ $<$ аналогично).

Пример. Доказать неравенство (1).

Доказательство. Рассматриваем разность между обеими частями доказываемого неравенства:

$$r = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab},$$

$$r = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

Так как здесь $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$, $2 > 0$, то $r > 0$. Это значит, что

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}\ .$$

4. **Метод усиления.** Основан на свойстве транзитивности: если $A > B, B \geqslant C$, то $A > C$ (для случая знака „меньше" $<$ — аналогично). Поясним. Если надо доказать, что $A > C$, но нам удалось доказать, что $B \geqslant C$ (иногда это бывает проще) при условии, что $B < A$, то неравенство $A > C$ считается доказанным.

Пример. Доказать, что

$$A = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots < 1 \qquad (3)$$

(число членов ряда бесконечно). Обозначение левой части ввели ради краткости дальнейших выкладок.

Доказательство. Рассмотрим ряд:

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 2\cdots 2}}_{n-1 \text{ раз}} + \cdots \qquad (4)$$

здесь:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2!};\quad \frac{1}{2\cdot 2} > \frac{1}{3!};\quad \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} > \frac{1}{4!};\quad \cdots;\quad \underbrace{\frac{1}{2\cdot 2\cdots 2}}_{n-1 \text{ раз}} > \frac{1}{n!};$$

Поэтому $A < B$.

Далее по формуле бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем:

$$B = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1;\ C = 1,$$

оказалось $B = C$. Окончательно получаем: $A < C$. ч. т. д.

5. **Оценка отношения частей неравенства**: если $A > B > 0$, то

$$\frac{A}{B} > 1 \tag{5}$$

и обратно, если $B > 0$, то из (5) следует, что $A > B$.

Пример. Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot \sqrt{2n+1} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \tag{6}$$

Доказательство. Возьмём равносильное неравенство

$$\frac{A^2}{B^2} > 1 \tag{6'}$$

и напишем серию очевидных неравенств:

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} < 1,$$
$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} < 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{2n \cdot 2n} < 1.$$

Перемножив эти неравенства почленно, получим (6').

Неравенство (6) верно. Доказанное неравенство можно записать в виде:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \tag{7}$$

6. **Метод полной математической индукции**[1].

Пример. Доказать неравенство Бернулли[2]:

$$(1+\alpha)^n > 1 + \alpha n;\ 1 + \alpha > 0,\ n \geqslant 2;\ \alpha \neq 0.$$

Доказательство. 1) При наименьшем из допускаемых значений $n = 2$ неравенство верно:

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + \alpha 2.$$

---

[1] Об этом методе см. приложение 2 на стр. 22[illegible].

[2] Я. Бернулли (1654 — 1705) — знаменитый швейцарский математик.

2) Допустим, что неравенство верно при $n = \kappa$:

$$(1+\alpha)^{\kappa} > 1 + \alpha \cdot \kappa;\ (\kappa \geqslant 2)$$

3) Рассмотрим $(1+\alpha)^{\kappa+1}$:

$(1+\alpha)^{\kappa+1} = (1+\alpha)^{\kappa} \cdot (1+\alpha) > (1+\alpha\kappa) \cdot (1+\alpha)$ — по допущению.
Дальше:

$$(1+\alpha)^{\kappa+1} > (1+\alpha\kappa)\ (1+\alpha) = 1 + \alpha \cdot (\kappa+1) + \alpha^2 \cdot \kappa > 1 + \alpha(\kappa+1),$$

так как $\alpha^2 \kappa > 0$. Неравенство верно для $n = \kappa + 1$. На основании принципа математической индукции можно считать неравенство доказанным для любых натуральных $n \geqslant 2$.

б) **О средних величинах.** Любое число c, заключённое между наименьшим $a_1 = a$ и наибольшим $a_n = A$ из чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (для удобства считаем, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$) и удовлетворяющее неравенствам:

$$a \leqslant c \leqslant A, \tag{1}$$

называется средним для этих чисел.
(Знак равенства соответствует случаю $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$).
Если не все числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ равны между собой, то существует бесконечно много средних для данных чисел: все числа интервала от a до A будут средними для $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Основные свойства средних.

1. Если $a \leqslant c \leqslant A$, то при $\kappa > 0$

$$a \cdot \kappa \leqslant c \cdot \kappa \leqslant A \cdot \kappa,$$

т. е. $\kappa \cdot c$ — есть среднее для чисел $a_1 \cdot \kappa, a_2 \cdot \kappa, \cdots, a_n \cdot \kappa$.

2. Если $a_1, a_2 \cdots, a_n$ все положительные, κ — натуральное, то

$$a^{\kappa} \leqslant c^{\kappa} \leqslant A^{\kappa},$$

т. е. c^{κ} — есть среднее для чисел $a_1^{\kappa}, a_2^{\kappa}, \cdots, a_n^{\kappa}$.

Следствие для чисел $\sqrt[\kappa]{a_1}, \sqrt[\kappa]{a_2}, \cdots, \sqrt[\kappa]{a_n}$:

$$\sqrt[\kappa]{a} \leqslant \sqrt[\kappa]{c} \leqslant \sqrt[\kappa]{A}.$$

3. Если $b > 0$, то b^c есть среднее для чисел b^{a_1}, $b^{a_2}, \cdots, b^{a_n}$:

$$b^a \leqslant b^c \leqslant b^A.$$

4. Если $b > 1$ и все числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ положительны, то

$$\lg_b a \leqslant \lg_b c \leqslant \lg_b A.$$

5. Если дроби: $a_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $a_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $\cdots$, $a_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ все имеют положительные знаменатели, то:

$$a \leqslant \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n} \leqslant A; \quad c = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}, \tag{2}$$

где a — наименьшая, A — наибольшая из рассматриваемых дробей.

Следствие 1. Если $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 1$, то

$$c = c_a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{3}$$

Среднее арифметическое c_a любого количества чисел равно n-й части их суммы.

Следствие 2. Если $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, то

$$c = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \cdots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \tag{3}$$

Следствие 3. Если $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ — положительны, то

$$c = \frac{\kappa_1 \alpha_1 + \kappa_2 \alpha_2 + \cdots + \kappa_n \alpha_n}{\kappa_1 \beta_1 + \kappa_2 \beta_2 + \cdots + \kappa_n \beta_n}.$$

Следствие 4. Если $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$ — положительны,

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 1, \text{ то}$$

$$\kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \cdots + \kappa_n a_n = c \cdot (\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n),$$

$$c = c_в = \frac{\kappa_1 \cdot a_1 + \kappa_2 \cdot a_2 + \cdots + \kappa_n \cdot a_n}{\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n} \tag{4}$$

$c_в$ называется средним взвешенным.

Следствие 5. Если $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ — положительны, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ все равны 1, то

$$c = c_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \tag{5}$$

т. е. получается среднее геометрическое (пропорциональное) положительных чисел: $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Среднее, определяемое для чисел, отличных от нуля, согласно равенству:

$$c_г = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \tag{6}$$

называется средним гармоническим этих чисел.

Часто применяется еще среднее

$$c_к = + \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}, \tag{7}$$

называемое средним квадратичным чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Средние c_a и $c_к$ любых действительных чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ связаны неравенством:

$$|c_a| \leqslant c_к \tag{8}$$

Для всех четырёх средних при положительных $a_1, a_2, \cdots, a_n$ имеют место неравенства:

$$c_г \leqslant c_n \leqslant c_a \leqslant c_к \tag{9}$$

Причём знак равенства соответствует случаю равных чисел. Все рассмотренные свойства основных средних величин постарайтесь доказать самостоятельно. Докажите также теорему: Среднее арифметическое двух чисел и среднее гармоническое их составляют с самими числами пропорцию. (Из таблицы Гинкса. См. задачу № 23 в § 16)

§ 15. Задачи на неравенства

1. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$, то

$$(a + c)(b + c)(a + 1)(b + 1) \geqslant 16\, abc.$$

2. Доказать, что при положительных a, b и c имеет место неравенство:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}.$$

3. Доказать, что если $a>b>0$, то разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел заключена между

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\text{ и }\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

4. Доказать неравенство:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots99}{2\cdot4\cdot6\cdots100}<\frac{1}{10}.$$

5. Доказать, что при неравных положительных a, b и c имеет место неравенство:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}>3.$$

Доказать более общее утверждение:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}>n.$$

6. Показать, что при $a\neq0$ и $b\neq0$ справедливо неравенство:

$$5a^2-6ab+5b^2>0.$$

7. Доказать, что если a, b и c положительные числа, то

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

8. Доказать неравенство:

$$a^4+b^4\geqslant ab(a^2+b^2).$$

9. Дано: $\frac{a}{b}<\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}$; числа a, b, a_1, b_1, a_2 и b_2 — все положительные. Доказать, что

$$\frac{a+a_1}{b+b_1}<\frac{a+a_1+a_2}{b+b_1+b_2}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}.$$

10. Показать, что при любом натуральном $n \geqslant 1$:

$$1)\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n};$$

$$2)\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

11. Доказать, что при $a>0$ и $b>0$:

$$1)\ \frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3;$$

$$2)\ 27a^2b\leqslant 4(a+b)^3;$$

$$3)\ (a+b)^4\leqslant 8(a^4+b^4).$$

12. Для положительных a, b и c доказать неравенство:

$$3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

13. Доказать, что при любых действительных значениях x и y:

$$25(x^2+y^2)+(12-3x-4y)^2\geqslant 72.$$

14. Если положительные числа a, b и c меньше единицы, то имеет место неравенство: $(1-a)(1-b)(1-c)>1-(a+b+c)$. Доказать.

15. Доказать, что если $a^2+b^2+c^2=1$, $m^2+n^2+\kappa^2=1$,

то $$|am+bn+c\kappa|\leqslant 1.$$

16. Показать, что если a, b и c — стороны треугольника, то трёхчлен:

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

всегда имеет положительное значение.

17. Каким условиям должно удовлетворять $a>0$, чтобы при $R\geqslant r>0$ имело место неравенство:

$$0\leqslant\frac{a^2+R^2-r^2}{2aR}\leqslant 1$$

18. Доказать, что при положительных a, b, x, y и $a^2+b^2<1$ имеет место неравенство:

$$\sqrt{x^2+y^2}>ax+by.$$

19. Доказать неравенство:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}<\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}; \qquad (a>0).$$

20. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные действительные числа, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right).$$

21. Доказать, что при $n>1$ верны неравенства:

1) $2^n > 2^{\frac{n-1}{2}}\, n+1;$

2) $\frac{1}{2}<\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}}<1;$

3) $(2n)!<[n(n+1)]^n.$

22. Доказать, что если $-1\leqslant a\ll 1$ и $-1\leqslant b\leqslant 1$, то имеет место неравенство:

$$\left|ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right|\leqslant 1.$$

23. Доказать, что можно найти такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1 и каждый член которой в κ раз больше суммы всех следующих за ним членов. При каких κ задача возможна?

24. Доказать для треугольника неравенства:

1) $abc\geqslant(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c);$

2) $a^2+b^2+c^2<4p^2-2R(h_a+h_b+h_c);$

3) $h_a+h_b+h_c\geqslant 9r;$

4) $R\geqslant 2r;$

5) $h_a\, h_в\, h_c\geqslant 27r^3;$

6) $r_a\, r_в\, r_c\geqslant 27r^3.$

25. Для расстояний d_a, d_b и d_c произвольной точки внут-

ри треугольника от соответствующих сторон треугольника и для его высот справедливы неравенства:

$$h_a \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant h_c.$$

Частный случай:

$$h_a \leqslant 3r \leqslant h_c.$$

(предполагается, что $a \geqslant b \geqslant c$). Доказать.

26. Доказать, что при положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

27. **Задача Шлёмильха.** Показать, что при $n > 2$ имеет место неравенство:

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots n^2 > n^n.$$

28. **Задача из французского „Журнала элементарной математики" (XIX в).** У торговца заведомо неверные весы. Первому покупателю он отпускает один фунт товара с одной чашки весов. Второму покупателю он отвешивает один фунт того же товара на другой чашке, думая, что он при этом компенсирует неточность отвешивания. Спрашивается, выгадал в действительности торговец или остался в убытке?

29. Решить неравенства. Изобразить решения на числовой оси.

1) $(x-2)(x+3)(x+5) > 0.$

2) $x(x+2)(x-3)(x^2+1) < 0.$

3) $x^3 + 1 > x^2 + x.$

4) $\frac{x}{3} + \frac{12}{x} > 5.$

5) $|x-1| \leqslant 2.$

6) $\left|\frac{x}{a}\right| \geqslant 1$, где $a \neq 0$ — действительное число.

7) $\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} > \frac{(x+b)}{x^2+b^2}$; ($a$ и b — параметры, $ab > 0$)

30. Решить графически неравенства:

1) $2x+y>3$; 2) $|x-y|>1$, $|x|>5$;

3) $3x+y\leqslant 2$, $x+3y\geqslant 2$, $x>0$, $y<0$.

31. Дано неравенство: $ax^2-(a-1)x+a>0$. Требуется определить:

1) Значения a, при которых неравенство верно при любых x;

2) Значения a, при которых число $\frac{1}{2}$ заключено между корнями данного трёхчлена.

32. При каких значениях x и y выражение: $z=(x+yi)^3$ принимает вещественные значения, бо́льшие 8?

§ 16. Прогрессии.

1. Сколько одинаковых членов в прогрессиях:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots$$

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots,$$

если в каждой из них по 121 члену?

2. При каких значениях a корни уравнения:

$$x^4-(3a+5)x^2+(a+1)^2=0$$

образуют арифметическую прогрессию?

3. Числа a^2, b^2 и c^2 составляют арифметическую прогрессию. Доказать, что числа:

$$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a}\ \text{и}\ \frac{1}{a+b}$$

также составляют арифметическую прогрессию.

4. Доказать, что во всякой конечной арифметической прогрессии произведение двух членов, равноотстоящих от крайних членов, возрастает по мере удаления от концов к её середине.

5. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что R равен третьей части одной из высот.

6. Доказать, что если три простых числа образуют арифметическую прогрессию, то разность прогрессии делится на 6.

7. Доказать, что для всякой арифметической прогрессии:

$$\div a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

имеет место равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

8. Доказать, что сумма всякой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$ равна учетверённому второму члену.

9. Сумма последовательных четырёх членов геометрической прогрессии равна a, сумма их квадратов равна b. Показать, что сумма средних членов прогрессии удовлетворяет квадратному уравнению:

$$x^2+\frac{b}{a}x=\frac{a^2-b}{2}.$$

10. Найти три положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, если известна их сумма и сумма их квадратов. Исследовать решение.

11. Написать арифметическую прогрессию, если сумма членов выражается через число членов n равенством:

$$S=an^2+bn.$$

(a и b — произвольные данные числа).

12. Найти четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 126, а сумма остальных — 30.

13. Найти сумму восьми членов геометрической прогрессии, сумма первого и четвёртого членов которой равна 18, а сумма второго и третьего членов — 12.

14. Найти четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, если сумма первого и третьего из них равна 50, а сумма остальных 150.

15. Арифметическая и геометрическая прогрессии удовлетворяют следующим условиям:

1) первые члены их одинаковы;

2) сумма первых двух членов арифметической прогрессии

превышает сумму первых двух членов геометрической прогрессии на величину, равную утроенному первому члену:

3) сумма первых трёх членов арифметической прогрессии равна сумме первых трёх членов геометрической прогрессии.

Вычислить знаменатель геометрической прогрессии.

16. Доказать, что если x, y и z составляют геометрическую прогрессию, то

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$$

17. Определить стороны треугольника, если они выражаются числами, образующими геометрическую прогрессию, причём произведение этих чисел равно 216.

18. В арифметической прогрессии $\div a_1\ a_2,\ \ldots,\ a_n$:

$$a_m=\kappa,\quad a_\kappa=m;\quad (m\neq\kappa).$$

Найти общий член этой прогрессии.

19. Доказать равенство:

$$\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}},$$

где через S_n обозначена сумма n первых членов геометрической прогрессии.

20. Найти такую арифметическую прогрессию, чтобы между суммой её первых m членов и суммой последующих mn членов существовало постоянное отношение κ, не зависящее от m.

21. Числа a_1, a_2, . . . , a_n образуют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию, если:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=m,\ a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=\kappa.$$

22. **Задача Ферма́.** Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\div\div a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$, то имеет место равенство:

$$\frac{S}{S-a_1}=\frac{a_1}{a_2}.$$

23. **Задача из таблицы Гинкса (Вавилония, 3 000 лет до н. э.)** На этой таблице имеется ряд чисел, записанных по шестидесятеричной системе: 1 · 36; 1 · 52; 2 · 8; 2 · 24; 2 · 40; 2 · 56; 3 · 12; 3 · 28; 3 · 44; 4.

Показать, что эти числа представляют арифметическую прогрессию, и записать её по десятичной системе.

Примечание. Точкой разделяются разряды чисел (все числа двузначные). При такой записи, например, число 2 · 30 равно $60 \times 2 + 30 = 150$, число 4 · равно $60 \times 4 + 0 = 240$.

24. **Задача из Папируса Ринда**[1] **(XVIII в. до н. э.).** Для первого члена убывающей арифметической прогрессии даётся выражение, представляющееся в современной символике следующей формулой:

$$a_1 = \frac{S_n}{n} - (n-1)\frac{d}{2}.$$

Показать, что формула правильна.

25. **Задача греческого геометра Гипсикла Александрийского (II в. до н. э.).** Доказать, что в арифметической прогрессии с чётным числом членов сумма членов второй половины превышает сумму членов первой на число, кратное квадрату половины числа членов.

26. **Правило XX из трактата „Ариабхаттиам" индийского астронома и математика Ариабхатта (конец V в. и начало VI в.).**

В этом правиле Ариабхатта словесно даёт выражение для числа членов арифметической прогрессии, которое определяется формулой:

$$n = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{-2a_1 + \sqrt{(d-2a_1)^2 + 8S_n d}}{d}\right],$$

где n — число членов, a_1 — первый член, d — разность прогрессии и S_n — сумма всех членов. Проверить справедливость этой формулы.

27. **Задача из этого же трактата.** Определить число ядер треугольной кучи.

28. **Задача знаменитого немецкого математика М. Штифеля (1486 — 1567).** Если написать прогрессию $\div\div$ (4, 8), (16, 32), . . . , $(2^{2n}, 2^{2n+1})$, то всякая пара чисел, стоящая в скобках, даёт совершенное число, если умножить большее из чисел этой пары, уменьшённое единицей, на меньшее. (Имеется в

---

[1] Папирус Ринда найден в 1858 г. английским египтологом Риндом и назван по его имени. Папирус написан Яхмосом. По своей форме и содержанию представляет ученическую запись математических знаний и является несколько искажённой копией другого более древнего папируса.

жду, что число $2^{2K+1}-1$ — простое. Утверждение автора о любой паре этих чисел ошибочно). Задача взята из трактата „Полная арифметика", написанного в 1544 г.

§ 17. Элементарные способы нахождения наибольших и наименьших значений функций

Нахождение наименьших и наибольших значений функции связано с нахождением экстремальных значений (минимумов и максимумов). Вопрос об экстремумах[1] любых функций решается в дифференциальном исчислении, но существует несколько элементарных приёмов нахождения наибольших и наименьших значений функций, в которых не требуется предварительного вычисления максимумов и минимумов (не надо забывать, что максимум и наибольшее значение, а также минимум и наименьшее значение функции, вообще говоря, не совпадают).

Не имея возможности доказать все теоремы, из которых следуют интересующие нас способы нахождения крайних значений функций, перейдём к их рассмотрению и разбору примеров.

а) Экстремум квадратного трёхчлена:

$$y = ax^2 + bx + c; \quad (a \neq 0). \tag{1}$$

Из представления квадратного трёхчлена:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

следует, что его экстремум будет достигаться при $x = -\frac{b}{2a}$.

Причём, если $a > 0$, то будем иметь:

$$y_{\text{наим.}} = c - \frac{b^2}{4a} \tag{2}$$

Максимума не будет, так как функция возрастает неограниченно. (Проверить, построив график для частного случая: $y = x^2 - 3x + 5$).

Если же $a < 0$, то, наоборот, функция имеет наибольшее значение, определяемое по той же формуле (2), но не имеет

[1] Максимум (max) и минимум (min) вместе называются экстремумами. Латинские слова maximum и minimum означают „наибольшее" и „наименьшее", а extremum — „крайнее". Условимся наибольшее и наименьшее значения функции называть „крайними" или экстремальными.

наименьшего значения, так как убывает неограниченно. (Проверить, построив график функции: $y=-2x^2+x+3$).

Примеры: 1. $y=2x^2-4x+5$.

$$y_{\text{наим.}}=5-\frac{16}{8}=3 \quad \text{при } x=1.$$

2. $y=-3x^2+30x-80$.

$$y_{\text{наиб.}}=-80-\frac{900}{-12}=-5 \text{ при } x=5.$$

Построить графики этих функций и проверить.
Доказать самим теорему:

Теорема I: Квадратный трёхчлен (1) имеет экстремум при $x=-\frac{b}{2a}$. Причём при $a>0$ этот экстремум будет наименьшим значением, а при $a<0$ — наибольшим.

б) ***Теорема II.*** Произведение нескольких положительных сомножителей, сумма которых постоянна, принимает наибольшее значение при равенстве сомножителей:

если $y=x_1x_2\cdots x_n$ и $x_1+x_2+\cdots+x_n=c$ — постоянное, то

$y_{\text{наиб.}}$ при $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{c}{n}$:

$$y_{\text{наиб.}}=\left(\frac{c}{n}\right)^n \qquad (3)$$

Например, $y=x^2(32-x^2)$ имеет наибольшее значение при $x^2=32-x^2$, т. е. $x=\pm 4$, так как $x^2+(32-x^2)=32$ — постоянная.

Обратная теорема такова:

Теорема III. Если произведение нескольких положительных сомножителей есть величина постоянная, то сумма их наименьшая в том случае, когда все они равны:

если $x_1\cdot x_2\cdots x_n=p$ — постоянно, то $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$ имеет наименьшее значение при

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\sqrt[n]{p}:$$

$$y_{\text{наим.}}=n\cdot\sqrt[n]{p}.$$

Например, если $u>0$, $v>0$, $t>0$, $uvt=8$, $y=u+v+t$ то $y_{\text{наим}}=6$. (Достигается при $u=v=t=\sqrt[3]{8}=2$).

в) Обобщение теорем II и III.

Теорема II'. Если $x_1 > 0,\ x_2 > 0, \cdots, x_n > 0$ и $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$ — постоянная, то функция:

$$y = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ — данные положительные рациональные числа, достигают наибольшего значения, когда

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_n}, \tag{4}$$

т. е. когда числа x_i рассматриваемого произведения пропорциональны своим показателям.

Если $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, то из ряда равных отношений (4), получим:

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{c}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \tag{5}$$

Отсюда находим значения $x_1, x_2, \cdots, x_n$, при которых названное выше произведение имеет наибольшее значение:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{c\,\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}, \\ x_2 &= \frac{c\,\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \frac{c\,\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Сам экстремум запишется так:

$$y_{\text{наиб}} = \left(\frac{c}{a}\right)^a \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}, \tag{7}$$

где через a обозначена сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Пример. Найти наибольшее значение функции:

$$U = x^2 yz^3,$$

если $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ и $x + y + z = 12$.

Решение. В данном случае $c = 12, a = 6, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3$ имеем:

$$U_{\text{наиб.}} = 2^6 \cdot 2^2 \cdot 1^1 \cdot 3^3 = 6\,912.$$

Теорема III′. Если $x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots, x_n > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \cdots, \alpha_n > 0,$

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = p \text{ — постоянно,}$$

то функция $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
достигает наименьшего значения при условии (4).

Обозначив каждое из отношений (4) через κ, получим:

$$x_1 = \alpha_1 \kappa, \quad x_2 = \alpha_2 \kappa, \cdots, \quad x_n = \alpha_n \kappa.$$

Отсюда

$$x_1^{\alpha_1} = \alpha_1^{\alpha_1} \kappa^{\alpha_1}, \quad x_2^{\alpha_2} = \alpha_2^{\alpha_2} \kappa^{\alpha_2}, \cdots, x_n^{\alpha_n} = \alpha_n^{\alpha_n} \kappa^{\alpha_n},$$

$$\kappa^{\alpha} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n} = p.$$

Находим значение κ:

$$\kappa = \sqrt[a]{\frac{p}{\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}}} \tag{8}$$

Значение наименьшей суммы чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n$ равно:

$$y_{\text{наим.}} = a\kappa = a \sqrt[a]{\frac{p}{\alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}}} \tag{9}$$

Пример. Найтн наименьшее значение функции:

$$u = x + y + z,$$

еслн $x > 0, y > 0, z > 0$ и $x^2 yz^3 = 6\,912.$

Решение. По формуле (9) получаем:

$$U_{\text{наим.}} = 6 \sqrt[6]{\frac{6\,912}{2^2 \cdot 1 \cdot 3^3}} = 12.$$

г) Экстремумы функций можно находить с помощью неравенств.

1. Экстремум квадратного трёхчлена.

Экстремум квадратного трёхчлена может быть получен из следующих соображений:

Трёхчлен $y = ax^2 + bx + c$ рассматривается для всех вещественных значений аргумента, поэтому уравнение $ax^2 + bx + c - y = 0$ должно иметь вещественные корни, т. е. дискриминант его:

$$D = b^2 - 4a(c - y) \geqslant 0. \qquad (10)$$

Отсюда и получается ограничение на значения y квадратного трёхчлена (1):

$$y \geqslant c - \frac{b^2}{4a} \text{ при } a > 0;$$

$$y \leqslant c - \frac{b^2}{4a} \text{ при } a < 0.$$

Рассмотрим пример. Найти крайние значения функции $y = a\,tgx + b\,\operatorname{ctg}x$ при условии, что $ab > 0$.

Решение. Умножив обе части равенства $y = a\,tgx + b\,ctgx$ на tgx (полагаем $tgx \neq 0$, в противном случае $ctgx$ не будет существовать) и перенеся всё в одну часть, получим уравнение:

$$a\,tgx^2 - y\,tgx + b = 0.$$

Корни полученного уравнения должны быть вещественными, поэтому должно выполняться условие:

$$D = y^2 - 4ab \geqslant 0 \quad \text{или} \quad y^2 \geqslant 4ab.$$

Отсюда находим, что y по абсолютной величине не меньше, чем $2\sqrt{ab}$, т. е. $|y| \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Таким образом, для данной функции находим такие крайние значения: $y_к = -2\sqrt{ab}$ — наибольшее из отрицательных значений и $y_к = 2\sqrt{ab}$ — наименьшее из положительных значений.

2. Аналогично рассуждают при нахождении экстремумов функций вида:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1} \qquad (11)$$

(a и a_1 — одновременно нулю не равны).

Рассмотрим конкретный пример. Найти экстремумы дробно-рациональной функции:

$$y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - x + 1}.$$

Решение. Рассматриваем уравнение относительно x: (y временно считаем параметром):

$$x^2(y-1) - x(y+3) + y + 1 = 0$$

Здесь дискримииант:

$$D = (y+3)^2 - 4(y^2 - 1) \qquad (\alpha)$$

Потребуем, чтобы было $D \geqslant 0$, для чего решим неравенство:

$$(y+3)^2 - 4(y^2 - 1) \geqslant 0.$$

В результате получим:

$$\frac{3 - 4\sqrt{3}}{3} \leqslant y \leqslant \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3} \qquad (\beta)$$

Отсюда находим:

$$y_{\text{наим.}} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}; \quad y_{\text{наиб.}} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}.$$

Аналогично находят экстремумы функций:

$$y = a \sin x + b \cos x,$$

$$y = a \cos 2x + b \sin x$$

$$y = \frac{a \sin x + b \cos x}{a_1 \sin x + b_1 \cos x} \text{ и др.}$$

(на этих примерах покажите, как это делается).

3. **Часто применяется неравенство Коши-Буняковского:**

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \geqslant (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^2 \qquad (12)$$

(попробуйте доказать это неравенство хотя бы для частных случаев: $n = 2; 3$).

Знак равенства имеет место при условии:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n} \tag{13}$$

Следствие 1. При переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$, постоянных $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = S$

функция $y = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ достигает своего наименьшего значения:

$$y_{\text{наим.}} = \frac{S^2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{14}$$

Пример. Найти наименьшее значение функции:

$$y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 ,$$

если $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 15$.

Решение. $y_{\text{наим.}} = \dfrac{15^2}{2^2 + 1^2 + 5^2} = \dfrac{225}{30} = 7{,}5.$

Следствие 2. Если $a_1, a_2, \cdots, a_n, x_1, x_2, \cdots, x_n$ — переменные и положительные, а $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \alpha^2$ — постоянное и $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \beta^2$ — постоянное, то наибольшее значение функции:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

равно:

$$y_{\text{наиб.}} = |\alpha\beta| \tag{15}$$

Например, если $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 16$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20$;

$a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ и $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_4 > 0$ (или у чисел x_1, x_2, x_3, x_4 знаки совпадают соответственно со знаками a_1, a_2, a_3, a_4), то:

$$y_{\text{наиб.}} = 4\sqrt{20} = 8\sqrt{5} .$$

4. Основные теоремы II и III являются следствиями из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом n

положительных чисел: $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Теорема эта формулируется так:

Среднее арифметическое нескольких положительных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \tag{16}$$

(знак равенства имеет место в случае $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$).

В качестве упражнения докажите, что теоремы II и III получаются отсюда, как следствия. После этого обобщите эти теоремы: из теорем II и III получите теоремы II′ и III′.

5. В заключение рассмотрим несколько задач на условные экстремумы.

1) Найти крайние значения функции:

$$z = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

если

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n, \quad y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant n^3.$$

Решение. Применяем неравенство Коши-Буняковского:

$$z^2 \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) \leqslant n^4.$$

Отсюда: $|z| \leqslant n^2$ или $-n^2 \leqslant z \leqslant n^2$.

Крайние значения: $z_{\text{наим.}} = -n^2$, $z_{\text{наиб.}} = n^2$.

2). Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$$z = x^2 - xy + y^2,$$

если

$$2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4.$$

Решение. Преобразуем исследуемую функцию к двум следующим видам:

$$z = \frac{1}{2}\left[(x^2 + y^2) + (x - y)^2\right] \tag{17}$$

и

$$z = \frac{1}{2}\left[3\,(x^2 + y^2) - (x + y)^2\right]. \tag{18}$$

Теперь, очевидно, наименьшее значение каждого из вторых слагаемых в квадратных скобках соответствует крайнему значению z, так как $x^2 + y^2$ ограничено. Так из (17) при $y = x$

получим наименьшее значение, из (18) при $y = -x$ получим наибольшее значение z. В обоих случаях для x^2 находим: $1 \leqslant x^2 \leqslant 2$.

Первое условие даёт:

$$1 \leqslant z = x^2 \leqslant 2. \tag{17'}$$

второе:

$$3 \leqslant z = 3x^2 \leqslant 6 \tag{18'}$$

Объединяя неравенства (17′) и (18′), находим:

$$z_{\text{наим.}} = 1, \; z_{\text{наиб.}} = 6.$$

3) Найти условие, при котором функция:

$$U = x^2 + y^2 + z^2$$

имеет наименьшее значение, если аргументы x, y и z удовлетворяют равенству:

$$ax + by + cz = \kappa,$$

где a, b, c и κ — постоянные.

Решение. Возьмём тождество Лагранжа:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 +$$

$$+ (cx - az)^2 + (bz - cy)^2.$$

Здесь в правой части первое слагаемое равно постоянному числу κ^2, постоянна также сумма $a^2 + b^2 + c^2$, поэтому наименьшее значение u достигается при условии, когда $bx - ay = 0$, $cx - az = 0$ и $bz - cy = 0$, т. е. при выполнении условия:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{ax}{a^2} = \frac{by}{b^2} = \frac{cz}{c^2}.$$

Отсюда по свойству ряда равных отношений получаем:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{\kappa}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Наименьшее значение функции равно:

$$U_{\text{наим.}} = \frac{\kappa^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

4) Найти наибольшее значение функции:

$$z = \sin^2(x+y)\cos(x-y) + \sin^2(x-y)\cos(x+y),$$

если

$$\sin^2 x + \sin^2 y = m,\ \cos x \cos y > 0.$$

Решение. Данная функция легко преобразуется к виду:

$$z = \frac{1}{2}\sin(x+y)(\sin 2x + \sin 2y) + \frac{1}{2}\sin(x-y)(\sin 2x - \sin 2y).$$

Окончательно функция z представится так:

$$z = 2m\cos x \cos y.$$

Наибольшее значение z соответствует наибольшему значению произведения $\cos x \cos y$, а это последнее достигается тогда, когда примет наибольшее своё значение произведение $\cos^2 x \cos^2 y$, т. е. если:

$$\cos^2 x = \cos^2 y = \frac{2-m}{2} \text{ или } \cos x \cos y = \cos^2 x,$$

так как $\cos^2 x + \cos^2 y = 2 - m$ — постоянно.

Таким образом, находим:

$$z_{\text{наиб.}} = m(2-m).$$

5) Найти наибольшее значение функции:

$$U = \cos^{2a} x \cos^{2b} y \cos^{2c} z,$$

если $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$, $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, $\cos z \neq 0$;

a, b, c — положительные рациональные числа.

Решение. Условие экстремума такое:

$$\frac{\cos^2 x}{a} = \frac{\cos^2 y}{b} = \frac{\cos^2 z}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Отсюда находим:

$$U_{\text{наиб.}} = \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

§ 18. Задачи на нахождение экстремумов функций.

Найти крайние значения следующих функций.

1. $y = x^2 - 6x$. 2. $y = 4x - x^2$. 3. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

4. $y = x + \sqrt{a(1-x^2)}$, $a > 0$, $x > 0$. 5. $y = x\sqrt[3]{x^3+2}$.

6. $y = \frac{2x}{x^2+1}$. 7. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$.

8. $y = \frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2+1)^2}$.

9. $y = \frac{x^n + a}{x^{2n} + a^2}$, n — натуральное.

10. $y = \frac{x^{2n} + a^2}{x^n - a}$, n — натуральное.

11. $y = x^m(a-x)^n$, m и n — положительные рациональные числа.

12. Функция:

$$y = \frac{ax^2 + b}{(x-1)(x-4)}$$

имеет крайнее значение -4 при $x = 2$. Найти значения a и b и показать, что это крайнее значение есть наибольшее из отрицательных значений, а $\frac{4}{9}$ — наименьшее из положительных значений данной функции.

Показать неограниченность следующих функций:

13. $y = \frac{a}{x}$.

14. $y = \frac{ax + b}{mx + n}$.

15. $y = (x - a)^3$.

16. $y = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$.

17. Пусть x, y и z — соответственно расстояния от произвольной внутренней точки данного треугольника до его сторон a, b и c. Найти наименьшее значение функции:

$$U = x^2 + y^2 + z^2$$

и наибольшее значение функции: $v = xyz$. Указать условия, при которых достигаются эти крайние значения.

18. Пешеход находится в точке A покрытого снегом поля на расстоянии l *м* от прямой дороги, ведущей в село $Д$. По снегу пешеход движется со скоростью a километров в час, а по дороге — со скоростью b километров в час. В какой точке B он должен выйти на дорогу для того, чтобы в кратчайший срок попасть в село $Д$?

19. К каналу шириной $a_м$ под прямым углом к нему подходит канал шириной в $a_м$. Найти наибольшую длину плота шириной $в$ *м*, который при сплаве не застрянет в повороте.

20. Человек, находящийся по одну сторону канала, имеющего ширину 1000 *м*, хочет достигнуть пункта на другом берегу, находящегося на расстоянии $6\frac{3}{4}$ *км* по каналу. Он может делать пешком 5 *км* и плыть 3 *км* в час. По какому пути он наиболее быстро дойдёт до цели?

21. Судно В, находящееся на расстоянии 75 *км* к востоку от судна А, идёт на запад со скоростью 12 *км/час*; судно же А идёт к югу со скоростью 9 *км/час*. В какой момент суда будут наиболее близки друг к другу?

22. На какой высоте надо повесить электрическую лампочку, чтобы в точке *м* пола, отстоящей на расстоянии l от вертикальной проекции этой лампы на пол, была наибольшая освещённость?

23. Из пункта А, находящегося на линии железной дороги, в пункт C, находящийся на расстоянии a от железной дороги, должны переправляться грузы в течение длительного времени и в большом количестве. Стоимость провоза весовой единицы на единицу расстояния равна m по железной дороге и n $(n > m)$ по шоссейной дороге. К какой точке В железной дороги следует провести шоссе, чтобы провоз груза из А в C был возможно дешевле?

24. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной в a рублей и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости плавание судна будет наиболее экономичным?

§ 19. Графики функций.

Указать основные свойства следующих функций по их графикам:

1. $y=\frac{x+1}{x-1}$. 3. $y=\frac{x^2}{x^2-9}$.

2. $y=\frac{x^2}{x^2-x+1}$. 4. $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-7x+12}$.

5. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$ при $a=2$. (График называется локоном Аньези).

6. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ при $a=2$. (График называется циссоидой).

7. $y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ при $a=2$. (График называется строфоидой).

8. $y=\pm\frac{x}{x-a}\sqrt{b^2-(x-a)^2}$ при $b=1$. $a=2$; при $a=b=2$ и при $a=2$, $b=3$. (График иазывается конхоидой Никомеда).

9. $y=\pm\sqrt{8+4x-x^2+8\sqrt{x+1}}$. (График — частный вид кардиоиды).

10. $y=\pm\sqrt{a\sqrt{a^2+4x^2}-a^2-x^2}$ при $a=2$. (График — частный случай лемнискаты).

11. $y=\pm\sqrt{\sqrt{a^4+4b^2x^2}-b^2-x^2}$ при $a=2$, $b=1$. (Графики называются овалами Кассини).

§ 20. Комбинаторика

1. Доказать тождества:

1) $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=C_n^k$

2) $C_k^k+C_{k+1}^k+\ldots+C_{k+n-1}^k=C_{k+n}^{k+1}$

3) $C_{\kappa}^{0} + C_{\kappa+1}^{1} + \ldots + C_{\kappa+n-1}^{n-1} = C_{\kappa+n}^{n-1}$

4) $C_{n}^{m} \cdot C_{m}^{m-\kappa} = C_{n}^{n+\kappa-m} \cdot C_{n+\kappa-m}^{n-m}$

5) $C_{2\kappa}^{\kappa-1} + C_{2\kappa}^{\kappa} = \frac{1}{2} C_{2\kappa+2}^{\kappa+1}$

6) $C_{m}^{l-1} + 2C_{m} + C_{m}^{l+1} = C_{m+2}^{l+1}$

7) $2! \cdot 3! \ldots n! \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 5^3 \ldots n^{n-2} = (n!)^{n-2}$

8) $1! + 2! + 3! + \ldots + (3n)! = 1! \cdot 3^2 + 4! \cdot 6^2 + \\ + \ldots + (3n-2)! \cdot (3n)^2$

9) $n! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(n+\kappa)!}{\kappa!} = \\ = \frac{(n+\kappa+1)!}{\kappa! \cdot (n+1)}$

10) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = C_{n+1}^{2} + 2 \cdot (C_{n}^{2} + \\ + C_{n-1}^{2} + \ldots + C_{2}^{2})$

11) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = C^5{}_{n+4} + 11C^5{}_{n+3} + \\ + 11C^5{}_{n+2} + C^5{}_{n+1}$

12) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = 120C^6{}_{n+3} + \\ + 30C^4{}_{n+2} + C^2{}_{n+1}$

13) $\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+\kappa}{(n+\kappa+1)!} = \\ = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+\kappa+1)!}$

14) $C_{m}^{0} C_{n}^{\kappa} + C_{m}^{1} C_{n}^{\kappa-1} + \ldots + C_{m}^{\kappa} C_{n}^{0} = C_{m+n}^{\kappa}$

15) $C_{n}^{0} C_{n}^{\kappa} + C_{n}^{1} C_{n}^{\kappa+1} + \ldots + C_{n}^{n-\kappa} C_{n}^{n} = \\ = C_{2n}^{n-\kappa}$

16) $C_n^0 C_{m-1}^{\kappa} + C_n^2 C_{m-2}^{\kappa-1} + \ldots + C_n^{2\kappa} C_{m-\kappa-1}^0 =$

$= 2^{2\kappa} C_{m+\kappa-1}^{2\kappa}$; $(n = 2m-1)$.

17) $C_n^1 C_{m-1}^{\kappa-1} + C_n^3 C_{m-2}^{\kappa-2} + \ldots + C_n^{2\kappa-1} C_{m-\kappa}^0 =$

$= 2^{2\kappa-2} \cdot \frac{n}{2\kappa-1} \cdot C_{m+\kappa-2}^{2\kappa-2}$; $(n = 2m-1)$

18) $\frac{n}{1!} - \frac{n(n-1)}{2! \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3! \cdot 3} - \ldots +$

$+ (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

2. Доказать тождества:

1) $\frac{1}{1! \cdot (n-1)!} + \frac{1}{3!\,(n-3)!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)! \cdot 1!} =$

$= \frac{2^{n-1}}{n!}$; (n — чётное)

2) $C_n^m \cdot C_m^m + C_n^{m+1} \cdot C_{m+1}^m + C_n^{m+2} \cdot C_{m+2}^m + \ldots +$

$+ C_n^n \cdot C_n^m = 2^{n-m} \cdot C_n^m$

3) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot nC_n^n = 0$; $(n \neq 1)$

4) $C_n^1 - 2^2 C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 \cdot C_n^n = 0$;

$(n \geqslant 3)$.

5) $n - \frac{n(n-1)}{1!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} - \ldots +$

$+ (-1)^{n-1} \cdot n = 0$; $(n \neq 1)$.

6) $C_n^0 (n-0)^2 - C_n^1 (n-2)^2 + C_n^2 (n-4)^2 - \ldots +$

$+ (-1)^n \cdot C_n^n (n-2n)^2 = 0$; $(n \neq 2)$.

7) $C_n^0 (n-0)^2 + C_n^1 (n-2)^2 + C_n^2 (n-4)^2 + \ldots +$

$$+ C_n^n (n-2n)^2 = 2^n \cdot n.$$

8) $C_n^m C_m^m - C_n^{m+1} \cdot C_{m+1}^m + C_n^{m+2} \cdot C_{m+2}^m - \ldots +$

$$+ (-1)^{n-m} \cdot C_n^n \cdot C_n^m = 0.$$

9) $(-1)^n \cdot C_{n+1}^1 + (-1)^{n-1} \cdot 2^2 \cdot C_{n+2}^3 +$

$$+ (-1)^{n-2} \cdot 2^4 \cdot C^5{}_{n+3} + \ldots + 2^{2n} \cdot C_{2n+1}^{2n+1} = n+1.$$

10) $1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

3. Что больше, 40! или 10^{40}?

4. На какую наибольшую степень числа 3 делится 40!?

5. Найти натуральные значения n, при которых какие-нибудь три последовательных коэффициента разложения бинома $(a+b)^n$ составляют арифметическую прогрессию.

6. Найти наибольший член в разложении $(a+b)^n$, если $a>0$, $b>0$ и $a+b=1$.

7. Доказать, что сумма квадратов биномиальных коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна среднему коэффициенту разложения $(a+b)^{2n}$.

8. Доказать тождества:

1) $\frac{1!}{n} + \frac{2!}{n(n+1)} + \cdots + \frac{m!}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} =$

$$= \frac{1}{n-2}\left[1 - \frac{(m+1)!}{n(n+1)\cdots(n+m-1)}\right].$$

2) $(x+n)^n - \frac{n}{1!}(x+n-1)^n + \frac{n(n-1)}{2!}(x+n-2)^n -$

$$- \cdots + (-1)^n \cdot x^n = n!$$

3) $n^n - \frac{n}{1!}(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^n -$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n = n!$$

9. Решить уравнения:

1) $1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots (2x-1)! = \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]!$

2) $\frac{1}{c^x_4} - \frac{1}{c^x_5} = \frac{1}{c^x_6}$.

3) $[ax+b-(ax+b)!+1]!+(ax+b)! = ax+b+1$.

10. Международная комиссия состоит из 5 членов — представителей пяти различных государств. Материалы, над которыми работает комиссия, хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена комиссии, чтобы доступ к материалам был возможен только тогда, когда собираются любые три члена комиссии, но не меньше.

11. На шахматной доске можно расставить 8 ладей так, чтобы ни одна из них не била другую и все находились на чёрных полях. Сколько возможно таких различных расстановок?

12. Задача из сборника задач „Математические и физические развлечения" французского математика Ж. Озанама (1640—1717). Семеро друзей собрались к обеду, но между ними возник спор, кому с кем садиться. Чтобы прекратить пререкания, кто-то из присутствующих предложил всем сесть за стол как придётся, но с условием, чтобы вновь собраться на другой день и затем в следующие дни обедать вместе, причём каждый раз садиться по-разному, до тех пор, пока не будут испытаны все возможные комбинации. Спрашивается, сколько раз придётся им обедать вместе для этой цели?

Глава третья

ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Задачи на доказательство и геометрические места точек.

1. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков гипотенузы, на которые её делит точка касания вписанного круга.

2. Если в треугольнике стороны образуют арифметическую прогрессию ($a < b < c$), то $ac = 6Rr$. Доказать.

3. Доказать, что во всяком треугольнике сумма медиан меньше периметра и больше полупериметра.

4. Показать, что два треугольника, имеющие по три равных угла и по две равные стороны, не обязательно равны между собой.

5. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается его сторон в точках M, N и K. Доказать, что треугольник MNK всегда остроугольный.

6. Доказать равенства:

$$1)\ \frac{2s}{a^2+b^2+c^2}=\frac{h_a h_b h_c}{ah_b h_c+bh_c h_a+ch_a h_b};$$

Как изменится это равенство для прямоугольного треугольника?

$$2)\ \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r};\quad 3)\ \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}.$$

7. Доказать для треугольника равенство:

$$S^2=\frac{1}{2}Rh_a h_b h_c.$$

8. Показать, что если в треугольнике углы A и B отличаются на 90°, то стороны его связаны соотношением:

$$\frac{2}{c^2}=\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$$

9. Доказать, что если в треугольнике медиана равна половине стороны, на которую она опущена, то треугольник прямоугольный.

10. Доказать, что для всякого прямоугольного треугольника имеют место равенства:

$$1)\ r_1^2+r_2^2=r^2\ \text{и}\ 2)\ R_1^2+R_2^2=R^2,\ 3)\ r+r_1+r_2=h,$$

где r, r_1, r_2 и R, R_1, R_2 — радиусы вписаных и описанных окружностей для данного треугольника и треугольников, на которые разбивает данный треугольник высота h, опущенная на гипотенузу.

11. Доказать для треугольника равенство:

$$ab+bc+ca=6R(m+n+\kappa),$$

где m, n и κ — расстояния от центра тяжести треугольника до его сторон.

12. Доказать, что если m, n и κ — соответственно перпендикуляры, опущенные из произвольной внутренней точки треугольника на его стороны a, b и c, то справедливо равенство:

$$\frac{m}{h_a}+\frac{n}{h_b}+\frac{\kappa}{h_c}=1.$$

13. Доказать для треугольника соотношения:

$$1)\ 4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2};$$

$$2)\ \left(\frac{h_a}{h_b}+1\right)\left(\frac{h_b}{h_c}+1\right)\left(\frac{h_c}{h_a}+1\right)=$$

$$=\left(\frac{h_a}{r}-1\right)\left(\frac{h_b}{r}-1\right)\left(\frac{h_c}{r}-1\right);$$

$$3)\ \frac{a}{r_a-r}+\frac{b}{r_b-r}+\frac{c}{r_c-r}=\frac{P}{r}.$$

14. Доказать, что если в треугольнике

$$r_c-r=2R,$$

то он прямоугольный.

15. Доказать, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке (симедианой называется прямая, проходящая через вершину треугольника и делящая противоположную сторону в отношении квадратов прилежащих сторон. Точка пересечения симедиан называется точкой Лемуана).

16. Доказать, что площадь треугольника, вершинами которого служат точки, симметричные ортоцентру (точке пересечения его высот) относительно сторон данного треугольника, равна:

$$s_1=\frac{s}{a^2b^2c^2}\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right),$$

где a, b, c — стороны треугольника, s — его площадь.

17. Доказать, что во всяком треугольнике

$$2s=\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)},$$

где x, y и z — расстояния от точки пересечения симедиан до сторон треугольника.

18. Доказать, что во всяком треугольнике

$$s = \frac{mnk}{r},$$

где m, n, k — отрезки сторон, отсекаемые точками касания вписанного круга.

19. Внутри прямоугольного треугольника дана точка O—вершина равновеликих треугольников OAB, OAC, OBC. Доказать, что

$$OA^2 + OB^2 = 5 \cdot OC^2.$$

C — вершина прямого угла.

20. Доказать, что стороны треугольника, имеющего вершинами центры тяжести треугольников ABD, BCD, CAD, где D — какая-то точка в плоскости треугольника ABC, со сторонами a, b и c, соответственно равны $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ и $\frac{c}{3}$.

21. Доказать, что если стороны треугольника связаны соотношением $b^2 + c^2 = 5a^2$, то медианы m_b и m_c взаимно перпендикулярны. Справедлива ли обратная теорема?

22. В треугольнике, у которого разность углов при основании равна 90°, длина биссектрисы внутреннего угла при вершине равна длине биссектрисы внешнего угла при вершине. Справедливо ли обратное утверждение?

23. Доказать признак равенства треугольников по двум медианам и стороне.

24. Показать, что если в треугольнике угол $A = 30°$, то

$$R = \sqrt{(r_a - r)(r_b + r_c)}$$

25. В треугольнике проведены высоты, основания которых соединены отрезками. Доказать, что в полученном треугольнике (центральном) высоты данного треугольника служат биссектрисами.

26. Можно ли, соединяя точки пересечения клетчатой бумаги, получить правильный треугольник?

27. Доказать, что в общем случае задачу о построении треугольника по двум сторонам и радиусу вписанной окружности с помощью циркуля и линейки решить нельзя.

28. Доказать, что в любом треугольнике имеют место равенства:

$$1)\ Rh_a h_b h_c = 2 r r_a r_b r_c;\quad 2)\ R\left(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a\right) =$$

$$= 2 r \left(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a\right).$$

29. Доказать подобие треугольников ABC и $A_1 B_1 C_1$, если

$$B_1 = B,\quad h_{b_1} : b_1 = h_b : b.$$

30. Доказать, что площадь вписанного четырёхугольника со сторонами a, b, c, d определяется равенством

$$s = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p — полупериметр четырёхугольника (теорема Лежандра).

31. Доказать, что в любом четырёхугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, точкой их пересечения делятся пополам.

32. Доказать, что биссектрисы углов прямоугольника, пересекаясь, образуют квадрат.

33. Доказать теорему: прямая, проходящая через точку пересечения боковых сторон трапеции и через середину основания, проходит через точку пересечения её диагоналей.

34. Доказать, что если в четырёхугольник можно вписать и около него можно описать окружность, то его площадь равна корню квадратному из произведения его сторон.

35. Если в произвольном четырёхугольнике $ABCD$ опустить на AB перпендикуляры BE, CF и OP (O — точка пересечения диагоналей), то площадь этого четырёхугольника

$$S = \frac{AD}{2} \cdot \frac{BE \cdot CF}{OP}.$$

Точка D — ортоцентр косоугольного треугольника ABC. Доказать, что каждая из четырёх точек A, B, C и D является в этом случае ортоцентром треугольника, образованного тремя остальными точками.

36. Если середины сторон четырёхугольника принять за вершины нового, то получится параллелограмм. При каких условиях он будет прямоугольником? Ромбом? Квадратом?

37. Доказать, что в трапеции сумма углов при меньшем основании больше, чем при большем основании.

38. Около окружности описан четырёхугольник. Его диагонали пересекаются в центре этой окружности. Доказать, что этот четырёхугольник — ромб.

39. Углы некоторого четырёхугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{5}$. Доказать, что каждый из углов этого четырёхугольника может быть разделён на три равные части с помощью циркуля и линейки.

40. В круге диаметра d проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = d^2$.

41. Доказать, что если в четырёхугольнике суммы квадратов противоположных сторон равны, то диагонали его пересекаются под прямым углом.

42. Если в треугольнике стороны составляют арифметическую прогрессию, то сумма расстояний от центра описанного круга до бóльшей и меньшей сторон равна диаметру вписанного круга. Доказать.

43. Если на одной из диагоналей квадрата, как на стороне, построить правильный треугольник и стороны квадрата, заключенные внутри этого треугольника, продолжить до пересечения со сторонами треугольника, то каждый из бóльших отрезков последних равен стороне вписанного в данный квадрат равностороннего треугольника, имеющего с квадратом общую вершину. Доказать.

44. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $c^3 > 8RS$.

45. M, N, P, Q — середины сторон квадрата $ABCD$. Показать, что при пересечении AN, BP, CQ и DM получается квадрат, площадь которого равна 0,2 площади данного квадрата.

46. Доказать для треугольника неравенство:

$$б_A > \sqrt{bc}\ .$$

47. На стороне AB квадрата $ABCD$, как на диаметре, описана вне квадрата полуокружность Пусть M какая-либо точка этой полуокружности; прямые MC и MD пересекают AB в точках P и Q, перпендикуляры к AB в точках P и Q пересекают MB и MA в точках S и R:

1) доказать, что $PQRS$ — квадрат;

2) доказать, что $AQ \cdot BP = PQ^2$;

3) на каком расстоянии x от AB надо взять точку M, чтобы $PQ = a \cdot к$ (a — сторона данного квадрата, $0 < к < 1$)?

4) найти x, для которого PQ имеет наибольшую величину.

48. Доказать, что если в четырёхугольнике $ABCD$ имеем: $AB = CD = a$, $AC - BD = b$, то $ABCD$ – равнобочная трапеция.

49. Точки окружности обладают тем свойством, что произведение их расстояний от диаметра AB и касательной в точке достигает максимума. Доказать, что этих точек существует только две и с точкой A они являются вершинами равностороннего треугольника.

50. Три окружности попарно касаются друг друга. Через точки касания проведена окружность. Доказать, что эта ок-

ружность перпендикулярна каждой из трех исходных (углом между двумя окружностями в точке их пересечения называется угол, образованный их касательными в этой точке).

51. Доказать, что центр описанной окружности, ортоцентр и точка пересечения медиан треугольника лежат на одной прямой (эта прямая называется прямой Эйлера).

52. Если три диагонали вписанного шестиугольника служат диаметрами описанных окружностей, то площадь шестиугольника равна удвоенной площади треугольника, имеющего своими сторонами какие-нибудь три из остальных диагоналей этого шестиугольника. Доказать.

53. Доказать, что окружности, построенные на двух сторонах треугольника, как на диаметрах, пересекаются на третьей стороне или на её продолжении.

54. Доказать, что общая касательная двух ортогонально (под прямым углом) пересекающихся окружностей есть средняя пропорциональная между их общей хордой и расстоянием между центрами.

55. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух пересекающихся прямых равна данному отрезку a.

56 Дан отрезок AB-m. Найти геометрическое место вершин C остроугольных треугольников ABC.

57 Дана окружность и вне её точка A. Найти геометрическое место точек M таких, чтобы расстояние MA равнялось длине касательной MT.

58 Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и отсекающих на данной прямой отрезок данной длины.

59 Определить геометрическое место центров тяжести треугольников, имеющих данное основание и данный угол при вершине.

60. Треугольник ABC, описанный около данного круга с центром O, изменяется так, что всё время $OA \cdot OB \cdot OC = m^3$. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника ABC.

61. Дан отрезок и точка на нём. Найти геометрическое место точек пересечения касательных, проведённых из концов отрезка к окружности, касающейся его в данной точке. Рассмотреть случай, когда точка дана на продолжении отрезка.

62. В круг вписаны трапеция, основанием которой служит диаметр, и равнобедренный треугольник, стороны которого параллельны сторонам трапеции. Доказать, что треугольник и трапеция равновелики.

63. Найти геометрическое место ортоцентров треугольников, имеющих общее основание и равные углы при вершине.

64. Найти геометрическое место центров прямоугольников, вписанных в данный треугольник так, что две вершины каждого прямоугольника лежат на основании, а две другие на боковых сторонах треугольника A.

65. Найти геометрическое место точек, касательные из которых к двум данным окружностям равны между собой.

66. Найти геометрическое место центров окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу.

67. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках M и N. Найти геометрическое место точек, описываемых серединой C отрезка MN, когда секущая вращается вокруг точки A.

68. **Задача великого греческого математика Евклида (III в. до н. э.).** Квадрат, построенный на стороне вписанного правильного пятиугольника, равен сумме квадратов сторон, вписанных в тот же круг правильных шестиугольника и десятиугольника. Доказать (10-ое предложение XIII книги „Начал").

69. **Задача Евклида (4-ое предложение III книги „Начал").** Доказать, что в круге никакие две пересекающиеся хорды, кроме диаметров, не делят друг друга пополам.

70. **Задача Фронтина, римского землемера I века н. э.** Доказать, что радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник, равен $p - c$, где c — гипотенуза, а p — полупериметр треугольника.

71. **Задача великого греческого учёного Архимеда (287—212 гг. до н. э.).** Доказать, что если в круге две хорды пересекаются под прямым углом, то сумма квадратов четырёх отрезков хорд равна квадрату диаметра.

72. **Задача Архимеда из трактата „Леммы".** Точкой A диаметр полукруга делится на два отрезка. На этих отрезках, как на диаметрах, строятся полуокружности по одну сторону с данным полукругом. Доказать, что площадь фигуры, ограниченной полуокружностями (арбелон), равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра к диаметру в точке A до пересечения с окружностью.

73. **Задача древнегреческого математика и астронома Птоломея.** Произведение диагоналей четырёхугольника, не вписываемого в круг, меньше суммы произведений противоположных сторон, а для вписываемого в круг — произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон. Доказать.

74. **Задача Архимеда из трактата „Леммы".** Если две окружности касаются в точке E и диаметры AB и CD параллельны, то точки A, E и D лежат на одной прямой. Доказать.

75. **Задача из трактата „Математический сборник" великого греческого математика Паппа, жившего в 300—370 го-**

дах н. э. Показать, что во всяком треугольнике параллелограмм, построенный на одной стороне треугольника внутри его и имеющий две другие вершины вне треугольника, равновелик сумме двух параллелограммов, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их, параллельные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма.

76. **Задача Паппа из этого же трактата.** Показать, что в кругах площади подобных сегментов относятся, как квадраты хорд, служащих им основаниями. (Обобщение теоремы Пифагора).

77. **Задача из трактата „Усовершенствованное учение Брамы" индийского математика Брамагупты, жившего в 6—7 веках н. э.** Показать, что произведение двух сторон треугольника, делённое на длину перпендикуляра, опущенного на третью сторону из противоположной вершины, равно диаметру описанного круга.

78. **Задача Брамагупты из этого же трактата.** В четырёхугольнике, диагонали которого взаимно перпендикулярны, корень квадратный из суммы квадратов двух противоположных сторон равен диаметру круга, описанного около этого четырёхугольника.

79. **Задача из трактата „О треугольниках" Иордана Неморария (умер в 1237 г.).** Доказать, что из всех треугольников с общим основанием, вписанных в круг, равнобедренный обладает наибольшей площадью.

80. **Задача Иогана Видмана, немецкого математика XV века.** Доказать, что если h высота треугольника, b — основание, x — меньший из его отрезков, то радиус описанного круга

$$R = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left[\frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2h}\right]^2}$$

81. **Задача английского математика Роберта Симпсона (1687—1768).** Показать, что если из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, опустить на его стороны перпендикуляры, то их основания лежат на одной прямой.

82. **Задачи французского математика Симóна Люльé (1750—1840).** Доказать для треугольника равенства:

$$1)\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}; \qquad 2)\ S^2 = r r_a r_b r_c.$$

83. **Задача немецкого математика XIX века А. Ф. Мёбиуса.** Доказать, что на направлении равнодействующей двух

сходящихся сил существует точка, обладающая тем свойством, что при повороте этих сил около их точек приложения на один и тот же произвольный угол, равнодействующая их всегда будет проходить через эту точку.

84. **Задача французского математика Лазаря Карно́ (1753 — 1823).** Доказать, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон треугольника равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей.

85. **Задача Эйлера.** Если d — расстояние между центрами кругов, описанного около треугольника и вписанного в него, то доказать, что $d^2 = R^2 - 2Rr$.

86. **Задача итальянского геометра Джиованни Чевы (1648—1734).** Доказать, что если через вершины треугольника и произвольную точку O в его плоскости провести прямые, пересекающие стороны треугольника AB, BC и CA соответственно в точках C_1, A_1 и B_1, то произведения каждых трёх отрезков, не имеющих общих концов, равны между собой: $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$. (Прямые, выходящие из вершин треугольника и пересекающиеся в одной точке, называются прямыми Чевы, или чевианами). Докажите обратную теорему.

§ 2. Задачи на вычисление.

1. По сторонам a и b треугольника найти третью сторону, если медианы, проведенные к данным сторонам, пересекаются под прямым углом.

2. Найти диаметр круга, в сегменте которого соответствующем хорде длиной в $\sqrt{21}$ *см*, вписан квадрат со стороной в 1,4 *см*.

3. Даны h_a, $б_A$ и m_a. Найти R.

4. По данным сторонам a, b, c треугольника ABC определить его медианы, высоты и биссектрисы его внутренних углов.

5. Найти число равнобедренных треугольников, которые можно составить из отрезков длиной в 1, 2, 3, . . ., n единиц.

6. Даны точки A, B и C. Найти точку M такую, чтобы:

1) суммы $AM + BM$ и $BM + MC$ имели данные значения;

2) разности AM BM и $BM - CM$ имели данные значения;

7. На стороне треугольника ABC дана точка M. Найти на BC точку N так, чтобы сумма расстояний M и N от AC равнялась MN.

8. Найти треугольник, стороны которого выражаются целыми числами, а площадь и сумма высот численно равны.

9. Дать геометрическое истолкование выражениям:

$$m + n = \frac{m\kappa^2 s^2 + nl^2 r^2}{\kappa lrs},$$

$$\kappa + l = \frac{\kappa n^2 s^2 + lm^2 r^2}{mnrs}$$

$$r + s = \frac{rl^2 n^2 + r\kappa^2 m^2}{mn\kappa l}.$$

10 Даны две равные окружности радиуса r, расстояние между их центрами равно d. Вычислить площадь ромба, образованного касательными, проведёнными из центров каждой окружности к другой.

11. Определить площадь круга, если разность между площадью правильного вписанного в него восьмиугольника и площадью правильного вписанного шестиугольника равна 1 $м^2$.

12. В равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой C вписан круг. Провести окружность, касающуюся катетов треугольника и вписанной окружности и найти её радиус.

13. Из медиан данного треугольника с площадью S построен новый треугольник. Найти площадь этого треугольника.

14. В треугольнике ABC приведены AF, BD и CE так, что $CF = \frac{1}{3} BC$, $AD = \frac{1}{3} AC$ и $BE = \frac{1}{3} AB$. Площадь треугольника, сторонами которого являются эти отрезки, равна S. Найти площадь треугольника ABC.

15. В круг радиуса R вписаны два правильных треугольника, которые пересекаются между собой так, что каждая сторона делится на три равные части. Найти площадь фигуры, образованной их пересечением.

16. В круг радиуса R вписана фигура, состоящая из квадрата, на сторонах которого построены правильные треугольники. Найти длину стороны этой фигуры.

17. Через произвольную точку внутри треугольника проведены прямые, параллельные его сторонам. Выразить площадь данного треугольника через площади S_1, S_2 и S_3 треугольников, образовавшихся внутри данного треугольника.

18 Дан прямоугольный треугольник ABC. На перпендикулярах к гипотенузе, восставленных в точках A и B, отложены $BB_1 = BC$ и $AA_1 = AC$. Вычислить стороны треугольника, зная, что периметр его равен $2p$, а площадь трапеции $BB_1 A_1 A$ равна $\frac{\kappa^2}{2}$ (κ — данное число). Исследовать решение.

19. Стороны треугольника равны: $AB = 10$ *см*, $AC = 12$ *см*, $BC = 18$ *см*. Через точку D, взятую на AB, проведена прямая $DF \parallel BC$ и через точку F — прямая $FP \parallel AB$.

1) Вычислить BD и BP, если периметр параллелограмма $BDFP$ равен $2a$ ($a = 24$ *см*);

2) Для каких значений a параллелограмм является ромбом?

3) Для каких значений a задача возможна?

20. Медианы треугольника ABC (m_a и m_c) образуют со стороной AC углы, равные 31 15′ и 28°45′, а площадь прямоугольника, построенного на этих медианах, равна $\sqrt{3}$ *м*^{2}. Вычислить без помощи тригонометрии площадь треугольника.

21. В параллелограмме большая диагональ равна d, а стороны — m и n. Требуется вычислить:

1) площадь кольца, образованного двумя окружностями, диаметры которых равны диагоналям параллелограмма;

2) длину хорды в большей окружности — части касательной к меньшей окружности.

22. Стороны треугольника связаны соотношением:

$$a^3 = b^3 + c^3$$

Может ли угол A быть прямым или тупым?

23. По четырём сторонам трапеции вычислить ее диагонали.

24. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения, и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найти отрезок её, ограниченный продолженными диагоналями, если основания трапеции суть a и b.

25. В трапеции, основания которой a и b, проведена через точку пересечения диагоналей прямая, параллельная основаниям. Найти отрезок её, заключённый между боковыми сторонами.

26. Найти отрезок прямой, параллельный основаниям трапеции и делящий её на две равновеликие части.

27. На катетах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $BDEC$ и $ACMF$. На гипотенузе построен (тоже вне данного треугольника) правильный треугольник ABN. Точки F, A и N лежат на одной прямой, гипотенуза треугольника ABC равна c. Найти площадь пятиугольника $DEMFN$.

28. В равнобедренном треугольнике радиус описанной окружности $R = 25$ *см*, а радиус вписанной окружности $r = 12$ *см*. Найти стороны треугольника.

29. Определить площадь треугольника по основанию a и по двум прилежащим к нему углам $B = 45°$ и $C = 30°$.

30. В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны m и n. Найти площадь треугольника.

31. Точка внутри круга отстоит от центра на расстоянии c.

Хорда, проходящая через эту точку, делится на две части a и b. Определить радиус круга.

32. Внутренняя и внешняя общие касательные к двум окружностям равны a и b. Определить длину общей касательной после того, как сближены окружности до соприкосновения.

33. В треугольнике, вписанном в круг радиуса R, одна сторона равна стороне правильного вписанного шестиугольника, другая — стороне правильного вписанного треугольника. Определить третью сторону и площади сегментов, отсекаемых сторонами треугольника

34. **Задача из трактата „Всё известное в арифметике" арабского математика Ал-Кархи**. Сторону вписанного правильного двенадцатиугольника выразить через диаметр круга.

Ал-Кархи получил для a_{12} следующее выражение:

$$a_{12}^2 = \left[\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{4}\right)^2}\right]^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2.$$

Проверить это равенство.

35. **Задача немецкого архиепископа Герберта (930 1008).** По данной площади прямоугольного треугольника и его гипотенузе найти катеты.

36. **Задача немецкого математика М. Штифеля (1486 — 1567).** Выразить через радиус описанного круга сторону правильного пятиугольника и его диагональ.

37. **Задача из „Курса математики" французских авторов Аллеза, Билли, Пюиссана и Будро.** По данному периметру правильного вписанного в круг многоугольника найти периметр одноимённого описанного многоугольника.

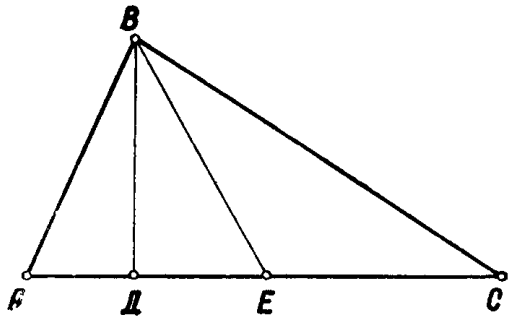
§ 3. О геометрических задачах на построение.

Под задачами на построение обычно понимают задачи, решаемые с помощью циркуля и линейки. От других видов задачи на построение отличаются тем, что искомые объекты должны быть изображены на чертеже. (Чаще всего с помощью циркуля и линейки).

В решении задачи на построение различают четыре части: 1) анализ, 2) построение, 3) доказательство, 4) исследование. Рассмотрим пример: Построить треугольник по основанию, высоте и медиане, проведённым к основанию.

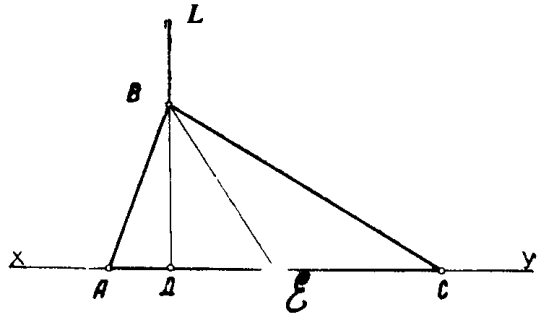
1. Анализ. Даже для этой сравнительно лёгкой задачи трудно мысленно представить возможный путь построения Чтобы облегчить себе отыскание этого пути, изобразим на чертеже произвольный треугольник ABC (ч. 1). Проведём в нём высоту и

медиану. Конечно, основание, высота и медиана изображённого нами треугольника не будут равняться данным отрезкам. Однако этот чертёж поможет нам установить связь между данными и искомыми величинами. В первой части мы будем заниматься установлением этих связей. Это и называется анализом задачи,



Черт. 1

Итак, мы должны построить треугольник ABC. Посмотрим, нельзя ли сначала построить другую фигуру, которая помогла бы определить и треугольник ABC. Легко заметить, что прямоугольный треугольник BDE можно построить (по гипотенузе BE и катету BD). Тем самым определены вершина треугольника точка B и середина основания точка E. Две другие вершины отстоят от точки E на расстояние, равное половине основания. Отложив это расстояние по DE в обе стороны от точки E, мы получим точки A и C. Таким образом, план для решения задачи мы имеем. Приступаем к осуществлению его по данным отрезкам. Это будет вторая часть решения — построение.



Черт. 2

2. Построение. На произвольной прямой строим прямой угол D. На DL откладываем отрезок h_a. Из точки B делаем засечку на прямой XY отрезком, равным m_a. Получим треугольник BDE. От точки E делаем две засечки на XY отрезком, равным $\frac{a}{2}$.

Докажем, что этот треугольник именно тот, который отвечает всем требованиям задачи.

3. Доказательство. 1) $AC = AE + EC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$;

2) $BD \perp AC$ и $BD = h_a$; 3) $AE = EC$ и $BE = m_a$

Однако мы строим этот треугольник только для данных нам отрезков. Всегда ли мы сможем провести это построение?

Единственный ли это треугольник, отвечающий требованиям задачи?

4. Исследование. Проследим за ходом своих построений: а) построение прямоугольного треугольника BDE возможно и единственно, если $h_a < m_a$; б) отложить по DE от точки E отрезки $\frac{a}{2}$ всегда возможно.

Итак, если $h_a < m_a$, то задача всегда возможна и имеет единственное решение.

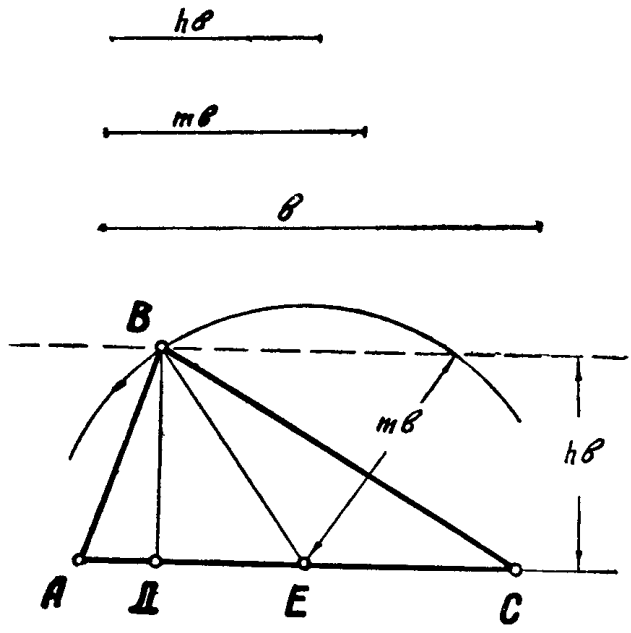
* * *

Рассмотрим некоторые методы решения задач на построение.

I. Метод геометрических мест точек (г.м.т.). Этот метод заключается в том, что решение задачи сводится к отысканию некоторой точки. Для этой точки находятся два геометрических места точек (две линии), каждой из которых она принадлежит. Построив эти два г.м.т., получают в их пересечении искомую точку, а значит, решают и задачу.

Решим, например, предыдущую задачу методом г.м.т.

1. Анализ. Точка B (ч. 3) удалена от середины основания на расстояние, равное $m_в$. Следовательно, точка B лежит на ок-



Черт. 3

ружности с центром в точке E и радиусом, равным m_b. Это есть одно г.м.т. Далее, та же точка B отстоит от основания AC на расстояние, равное h_b. Следовательно, точка B лежит на

прямой, параллельной AC и отстоящей от AC на расстояние h_q. Это есть второе г.м.т.

Итак, из анализа вытекает следующий план построения: на произвольной прямой откладывается отрезок, равный b. Концы его будут двумя вершинами треугольника ABC. Из его середины описывается окружность радиуса m_b. Далее, проводится прямая, параллельная основанию и отстоящая от него на расстояние h_b. В точке пересечения этих двух линий получится третья вершина B искомого треугольника. (Здесь и далее построение, доказательство и исследование предоставляются читателю).

Примечание. Два названных г.м.т. могут пересечься и в двух точках. Однако полученные два треугольника равны между собой, а по условию задачи положение треугольника на чертеже не имеет значения. Поэтому решение считается единственным. Этой точки зрения мы всегда и будем придерживаться.

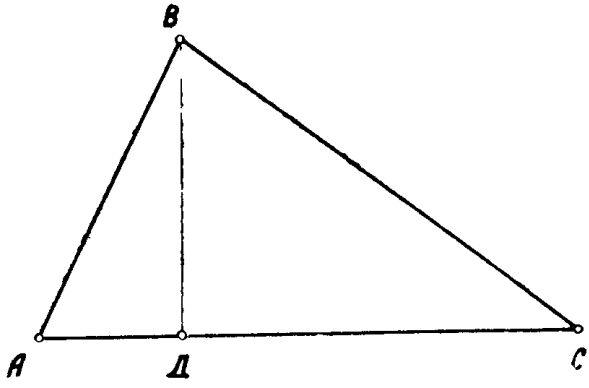
II. **Метод подобия**. Этот метод состоит в том, что вместо искомой фигуры строится сначала подобная ей фигура. Затем последняя преобразуется в искомую фигуру. Построение фигуры, подобной искомой, достигается отбрасыванием некоторых данных условия задачи.

Метод подобия выгодно применять в следующих случаях:

1) когда среди данных имеются углы и отношения линейных элементов.

Возьмём, например, задачу: построить треугольник по высоте h_b, углу A и отношению $m : n$ сторон, заключающих этот угол.

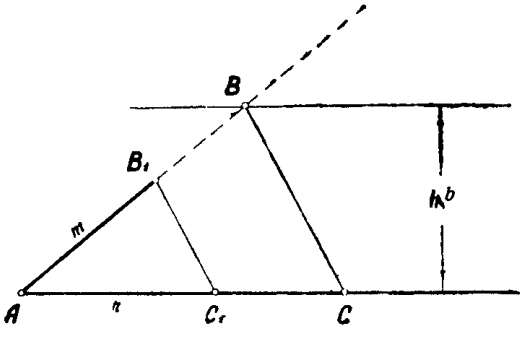
Анализ. Пусть задача решена, т. е. пусть треугольник ABC искомый (ч. 4).



черт. 4.

Тогда должно быть $BD = h_b$, $\angle A$ - данный угол и $AB : AC = m : n$, где m и n — данные отрезки. Отбросим пока требование, чтобы высота равнялась h_b и построим треугольник

ник, стороны которого были бы равны m и n. Очевидно, последний треугольник будет подобен искомому (по второму признаку подобия треугольников). Итак, вместо искомого треугольника мы имеем треугольник ему подобный. Используем теперь отброшенное ранее условие: проведём прямую, параллельную основанию и отстоящую от него на расстояние h_b. Эта прямая пересечёт сторону AB треугольника в вершине B искомого треугольника. Проведя через точку B прямую, параллельную B_1C_1, мы получим искомый треугольник ABC (ч. 5).

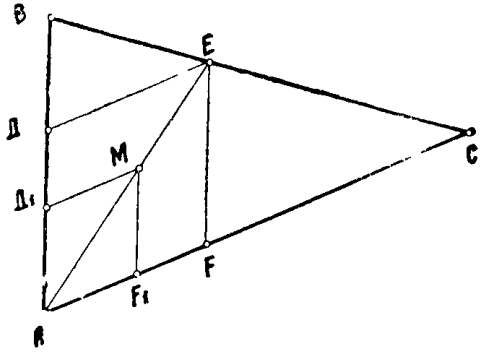


черт. 5.

2) Когда искомую фигуру нужно расположить определённым образом по отношению к данным фигурам.

Решим, например, задачу: Вписать в данный треугольник ромб так, чтобы один из углов ромба совпадал с углом треугольника, а одна из вершин располагалась на противолежащей стороне треугольника.

Анализ. Пусть задача решена(ч.6). Соединим точку A с точкой E. Через произвольную точку M, взятую на AE, проведём прямые MF_1 и MD_1 параллельно FE и ED. Тогда фигура AD_1MF_1 будет, очевидно, ромбом. Отсюда план решения задачи таков: на одной из сторон угла A откладываем произвольный отрезок AF_1. Строим ромб с углом A и стороной, равной отрезку AF_1. Через точку A и противолежащую вершину построенного ромба проводим прямую. Точка пересечения этой прямой со стороной BC даст вершину ромба E. Проведя через точку E прямые, параллельные сторонам треугольника ABC, мы получим искомый ромб.



черт. 6.

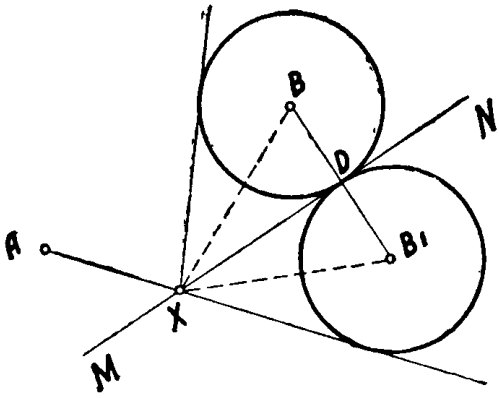
III. Метод симметрии. Метод симметрии состоит в том, что какая-нибудь из данных фигур заменяется ей симметричной относительно некоторой данной оси или оси, которая по данным задачи может быть построена. Иногда вместо искомой

фигуры строят другую, ей симметричную, а затем преобразуют её в искомую,

Пусть, например, имеется задача:

Дана прямая MN и точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой MN такую точку X, чтобы $\angle AXM = 2 \angle BXN$.

Анализ. Пусть задача решена. Построим точку B_1, симметричную B. Тогда $\angle DXB = \angle DXB_1$ (ч. 7). Продолжив AX, мы обнаружим, что точка B лежит на биссектрисе угла, вертикального $\angle AXM$. Но на биссектрисе угла располагаются центры всех вписанных в данный угол окружностей. Значит, если точку B_1 взять за центр окружности радиуса B_1D, то AX есть касательная к этой окружности. Это позволяет составить план решения задачи: строим точку B_1, симметричную B относительно MN. Из точки A проводим касательную к окружности, описанной вокруг точки B_1 радиусом BD. Точка пересечения этой касательной с прямой есть искомая.

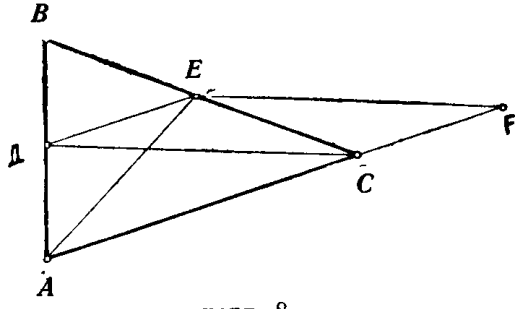


черт. 7.

IV. **Метод параллельного переноса.** В задачах на построение иногда приходится некоторые элементы фигуры или части их подвергать параллельному переносу и затем использовать их. В других задачах иногда сначала строится фигура, из которой искомая может быть получена параллельным переносом.

Рассмотрим пример:

Построить треугольник по основанию b и двум медианам m_a и m_c, проведённым к боковым сторонам.



черт. 8.

Анализ. Пусть задача решена. Перенесём медиану CD (ч. 8) параллельно самой себе так, чтобы точка D совпала с точкой E. Полученный четырёхугольник $CDEF$ есть параллелограмм, так как $DC = EF$ и $DC \parallel EF$. Следовательно, $CF = DE$. Но DE — средняя линия треугольника ABC. Значит, $CF = DE = \frac{a}{2}$. Тогда

$$AF = AC + CF = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$$

Итак, треугольник AEF можно построить по трем сторонам

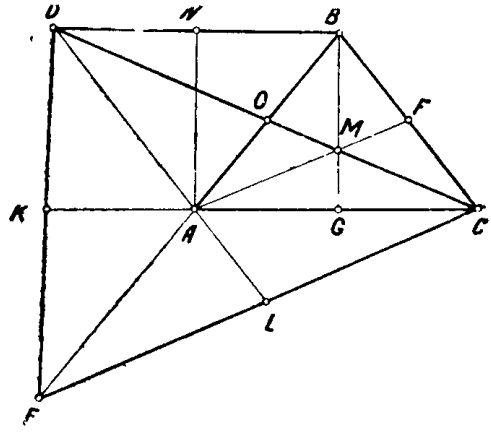
$$AF = \frac{3}{2}a;\ AE = m_c;\ EF = m_a$$

Построение этого треугольника определяет положение точки E — середины стороны BC. Значит точка B отстоит от точки E на расстояние EC. Последнее расстояние можно найти, ибо положение точки C на AF определяется легко.

План решения: строим треугольник AEF по сторонам $AF = \frac{3}{2}a$, $AE = m_c$, $EF = m_a$. На AF от точки A откладываем отрезок $AC = a$. Через точки C и E проводим прямую. Откладываем на этой прямой от точки E отрезок, равный EC, получим точку B.

Полезно знать некоторые свойства фигур, получающихся при параллельном переносе сторон треугольника и четырёхугольника.

I. Пусть сторона AC треугольника ABC перенесена параллельно самой себе в положение BD, а сторона BA продолжена за вершину A на такой же отрезок (ч.9). Полученный таким образом треугольник CDE обладает следующими свойствами:



черт. 9.

1) Стороны его в два раза больше медиан треугольника ABC.

2) В точке A пересекаются медианы треугольника CDE.

3) Две высоты каждого из треугольников ACD, ADE и ACE равны высотам треугольника ABC.

4) Площадь треугольника DEC равна утроенной площади треугольника ABC.

5) Углы треугольника DEC равны углам между медианами треугольника ABC.

6) Углы, образовавшиеся при точке A равны внутренним или внешним углам треугольника ABC.

Докажем эти свойства:

1) В треугольнике BCE медиана AF треугольника ABC является средней линией. Поэтому $CE = 2AF$ Четырехугольник $ADBC$ — параллелограмм. Поэтому диагонали его точкой пересечения делятся пополам Значит, CO — медиана треугольника ABC и $CD = 2CO$.

Проведём $AN \parallel BG$. Четырехугольник $ANBG$ — параллелограмм. Следовательно, $AN = BG$, $BN = GA$ и точка N — середина BD. Тогда AN есть средняя линия треугольника BDE. Поэтому $DE = 2AN = 2BG$.

2) Отрезок EO является медианой треугольника DEC, ибо $CO = OD$. Так как $AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AE$, то точка A делит медиану EO в отношении 2 : 1. По свойству медиан треугольника точка A должна быть точкой пересечения медиан треугольника CDE.

3) Докажем это свойство для треугольника ADC. В самом деле, высота его, проведённая из вершины D, будет равна высоте треугольника ABC, ибо точка D лежит с точкой B на одной прямой, параллельной AC. Высота треугольника CDE, проведённая из вершины C, равна высоте треугольника ABC, проведённой из вершины A, как расстояние между двумя параллельными прямыми.

Аналогично можно доказать это свойство и для двух других треугольников.

4) Разобъём треугольник CDE на три треугольника: CDA, DEA и EAC Площади каждого из этих треугольников равны площади треугольника ABC. Действительно, треугольник CDA имеет с треугольником ABC общую сторону, а высоты, проведенные в них к этой стороне, равны между собой. Следовательно, $S_{CDA} = S_{ABC}$.

Точно так же можно доказать, что $S_{CDA} = S_{ABC}$.

Треугольник DEA не имеет общей стороны с треугольником ABC, но стороны его AE и AD равны сторонам AB и BC треугольника ABC. Кроме того, высоты, проведенные в этих треугольниках к равным сторонам, равны между собой. Следовательно, $S_{DEA} = S_{ABC}$ Итак, $S_{CDF} = S_{CDA} + S_{DEA} + S_{EAC} = 3S_{ABC}$.

Доказательство пятого и шестого свойств предоставляется самому читателю.

Рассмотрим задачу, в которой удобно применить доказанные нами свойства параллельного переноса сторон треугольника.

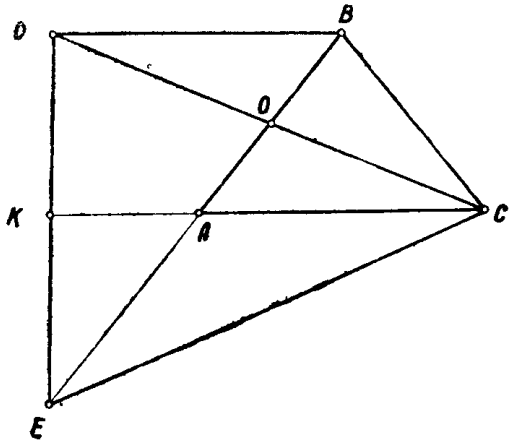
Задача. Построить треугольник по трем данным медианам.

Анализ. Пусть задача решена, т. е. искомый треугольник ABC (ч.10) построен. Построим для него треугольник CDE. Замечаем, что по треугольнику CDE можно найти: а) точку C; б) точку A — пересечение медиан ΔCDE; в) точку B, отложив на продолжении медианы EO отрезок, равный $\frac{1}{3}EO$.

Следовательно, решение задачи свелось к построению треугольника CDE, но последний имеет сторонами удвоенные медианы искомого треугольника ABC.

Значит, данная задача сведена к построению некоторого треугольника по трем его сторонам.

II. Пусть нам задан некоторый четырёхугольник $ABCD$. Перенесём его стороны AB и AD параллельно самим себе соответственно в положение CF и CE. Тогда мы получим четырёхугольник $BDEF$, (ч. 11) обладающий следующими свойствами:



черт. 10.

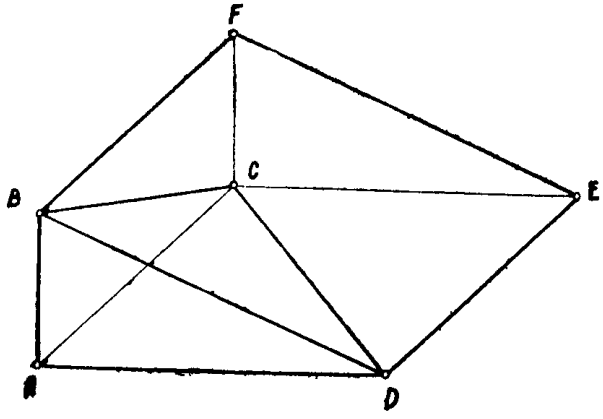
1) Четырёхугольник $BDEF$ — параллелограмм.

2) Стороны параллелограмма $BDEF$ равны диагоналям четырёхугольника $ABCD$.

3) Диагонали параллелограмма BEF равны удвоенным отрезкам, соединяющим середины противолежащих сторон четырёхугольника $ABCD$.

4) Площадь параллелограмма $BEDF$ равна удвоенной площади четырёхугольника $ABCD$.

5) Углы при точке C равны углам четырёхугольника $ABCD$. Углы параллелограмма $BDEF$ равны углам между диагоналями четырёхугольника $ABCD$.



черт. 11.

6) Расстояния от точки C до вершин параллелограмма равны сторонам четырёхугольника $ABCD$.

Доказательство этих свойств предоставляется читателю.

Приведём пример на применение этих свойств.

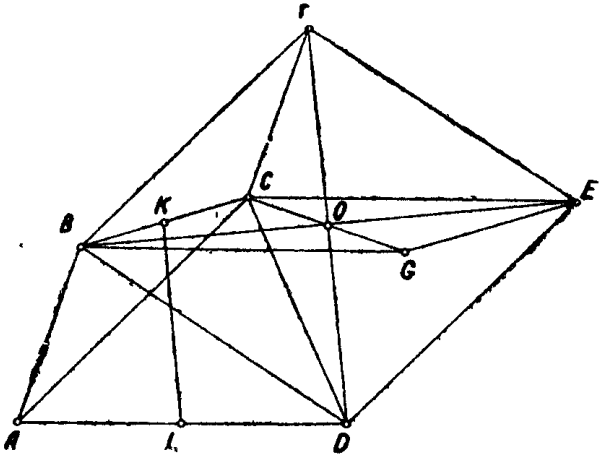
Задача. Построить четырёхугольник, зная стороны и отрезок, делящий две противолежащие стороны пополам.

Анализ. Пусть искомый четырёхугольник построен. Совершим параллельный перенос сторон AB и AD. Тогда на основании вышеназванных свойств будем иметь:

1) CF и CD — стороны четырёхугольника.

2) $FD = 2KL$ (ч. 12).

Значит, треугольник DCF можно построить. Далее построим четырёхугольник $BCEG$ так, чтобы диагональ его CG делилась пополам точкой пересечения диагоналей параллелограмма $BDEF$.



черт. 12.

Тогда $BCEG$ — параллелограмм и по данным задачи его легко построить. Это позволяет найти точку B. Для точки A известны расстояния её от точек B и D. Значит, легко построить и её.

V. Метод вращения вокруг точки. Иногда в задачах на построение, в целях сближения данных фигур (или данных фигур и элементов искомой фигуры), производят поворот данных фигур на определенный угол вокруг некоторой точки. Решение задач подобным способом носит название метода вращения.

Поясним сказанное на примере.

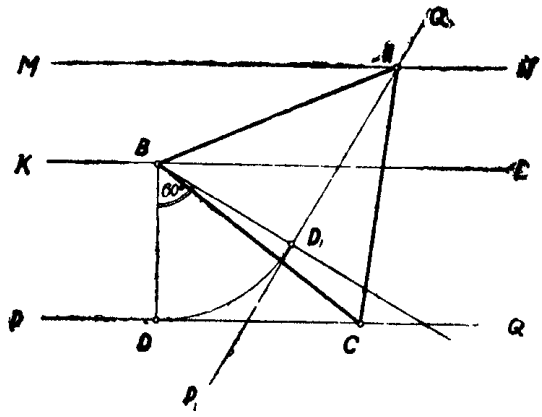
Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежали бы на каждой из трех данных параллельных прямых.

Анализ. Пусть данные прямые будут MN, KL, PQ, искомый треугольник ABC (черт. 13).

Одну из точек A, B, C можно выбрать произвольно. Пусть такой точкой будет точка B. Остается найти одну из точек A или C. Повернем вокруг точки B весь чертеж на 60°. При этом BC займет положение BA, PQ — положение P_1Q_1. Если

нам удастся определить положение P_1Q_1, то точка A будет найдена и наша задача решена.

Прямая P_1Q_1 получена из PQ вращением последней на 60°. А так как $PQ \perp BD$, то $P_1Q_1 \perp BD_1$, который получается из BD вращением его на 60°.



черт. 13

Итак, план решения задачи таков: поворачиваем отрезок BD на 60°, проводим в конце его перпендикуляр к нему. Точка пересечения его с MN есть вершина A.

Попробуйте сами решить задачу: построить равносторонний треугольник, вершины которого лежали бы на каждой из данных трех концентрических окружностях.

VI. Алгебраический метод. В некоторых задачах на построение искомый отрезок удается выразить через известные отрезки с помощью некоторой формулы. Часто такую формулу можно представить в виде комбинации более простых. Если уметь строить циркулем и линейкой эти более простые формулы, то можно построить их комбинацию, т. е. искомый отрезок.

Решение задач таким способом называется алгебраическим методом.

Простейшими формулами считаются:

1) $x = a \pm b$; 2) $x = na$; 3) $x = \frac{a}{n}$ (n — целое число);

4) $x = \frac{ab}{c}$; 5) $x = \frac{a^2}{c}$; 6) $x = \sqrt{ab}$; 7) $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$

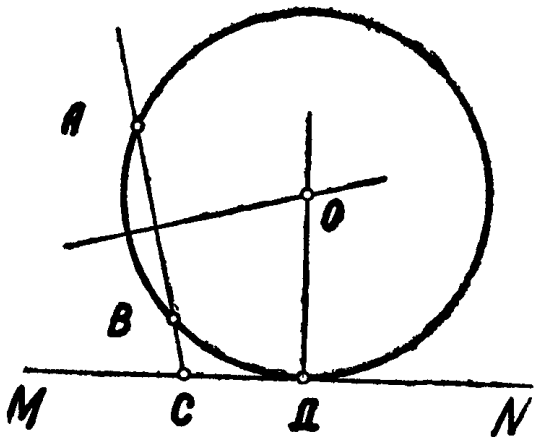
Чтобы решать задачи алгебраическим методом, нужно уметь строить отрезки, соответствующие этим простейшим формулам. Построение этих отрезков достаточно просто, имеется в школьных учебниках, поэтому мы не станем его приводить здесь.

Рассмотрим более сложный пример.

Задача. Через две данные точки A и B провести окружность, касательную к данной прямой MN (ч. 14).

Анализ. Пусть задача решена, т. е. через точки A и B проведена окружность O, касающаяся прямой MN. Центр окружности располагается на двух перпендикулярах: перпендикуляре, проведённом к AB в его середине, и перпендикуляре к MN,

восставленном в точке D. Первый перпендикуляр легко провести. Чтобы построить второй перпендикуляр, нужно знать положение точки D. На прямой MN известно положение точки C. Если бы знать расстояние точки D от точки C, то можно определить и положение точки D. Обозначим CD через x и попытаемся выразить этот отрезок через известные отрезки. Это можно сделать: CD есть касательная к искомой окружности, CA — секущая этой же окружности. На основании известного свойства касательной и секущей, проведенных к окружности из одной и той же точки, имеем $x^2 = CA \cdot CB$. Или $x = \pm\sqrt{CA \cdot CB}$. Это одно из основных построений.



черт. 14.

План построения задачи:

Построив отрезок $x_1 = \sqrt{CA \cdot CB}$, откладываем на MN от точки C в обе стороны отрезок x_1. Восставив в концах этих отрезков (отличных от C) перпендикуляры, получим в точках пересечения их с перпендикуляром в середину AB центры искомых окружностей (радиус легко определить).

При решении задач алгебраическим способом часто приходится строить корни квадратного уравнения.

Пусть дано квадратное уравнение вида: $x^2 + px + q^2 = 0$. (Здесь свободный член берется в виде квадрата некоторого числа, ибо левая часть уравнения будет иметь геометрический смысл лишь в случае ее однородности.)

Решаем квадратное уравнение:

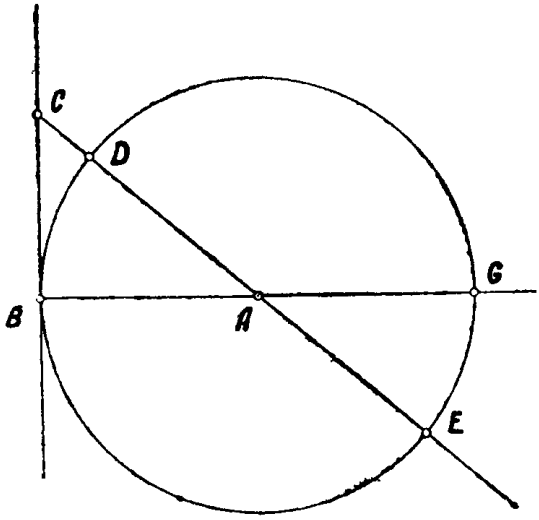
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}$$

$$x_1 = -\left(\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}\right)$$

$$x_2 = -\left(\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}\right)$$

Построим сначала отрезок $y = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}$. Это есть катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $\frac{p}{2}$ и другим катетом q.

На чертеже 15 $CB = q$; $CA = \frac{p}{2}$, Тогда $AB = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}$. Корнями уравнения (взятыми с противоположным знаком) будут отрезки DA и DE.



черт. 15

Аналогично строятся корни уравнений.

$$x^2 - px + q^2 = 0 \text{ и}$$

$$x^2 - px - q^2 = 0$$

Выбор того или другого метода зависит от конкретных данных задачи. Одна и та же задача может быть решена разными методами, но чаще всего решение задачи представляет собой комбинацию разных методов.

§ 4. Задачи на построение

1. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе острого угла.

2. Построить треугольник ABC, зная AB, BC и $B + 2C$.

3 Построить треугольник по сумме двух сторон $b + c = m$, высоте h_c и медиане m_c.

4. Провести в данном направлении к двум данным окружностям секущую, отсекающую в окружности две равные хорды.

5. Провести в данном направлении прямую так, чтобы разность квадратов ее расстояний от данных точек A и B равнялась квадрату данного отрезка a.

6. Дана окружность и два радиуса OA и OB. Провести секущую $MNKL$ так, чтобы $MN : NK : KL = 1 : 2 : 3$. (M и L — точки пересечения секущей с окружностью, N и K — точки пересечения с указанными радиусами).

7. В данный круг вписать треугольнник так, чтобы две его стороны проходили через две данные точкн (обе внутри или обе вне круга), из которых третья сторона была бы видна под одинаковыми углами.

8. По центрам квадратов, вне построенных на сторонах треугольника, построить самый треугольник.

9. В данный треугольник вписать прямоугольник с диагональю данной длины.

10. Через точку, данную внутри круга, провести:

а) хорду данной длины a;

б) хорду наименьшей длины.

11. Дан угол и точка M внутри него. Провестн через M прямую так, чтобы отрезок, отсекаемый на ней сторонами угла, делился в точке M пополам.

12. Через точку, данную вне угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник данного периметра.

13. Дана окружность радиуса R. Построить квадрат так, чтобы одна из его сторон касалась окружности, а две остальные вершины лежали на окружности.

14. Построить правильный треугольник так, чтобы вершины его лежали на трех параллельных прямых; на трёх концентрических окружностях.

15. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Провести три окружности с центрами в этих точках, попарно касающиеся друг друга.

16. Из концов данной хорды окружности провести две параллельные хорды, сумма длин которых равна данному отрезку.

17. Провести на плоскости прямую так, чтобы она отстояла на равных расстояниях от трёх заданных точек.

18. Пользуясь циркулем н линейкой, разделить на три равные части угол в 54°.

19. Построить треугольник по точкам пересечения его высот с описанной окружностью.

20. Пересечь трапецию прямой, параллельной основанию так, чтобы её отрезок внутри трапеции делился диагоналями на три равные части.

21. Построить треугольник, зная точки, симметричные центру описанного круга относительно его сторон.

22. Дан острый угол и две точки. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне угла, вершина — на другой, а боковые стороны проходилн бы через данные точки.

23. Построить треугольник ABC, если даны высота h_c, отрезок d этой высоты от вершины C до точки пересечения высот и угол α между стороной c и прямой, соединяющей точки пересечения высот и медиан.

24. В окружности дана хорда AB. В известном направлении провести хорду CD, пересекающую AB в точке E так, что отношение $AE : CD$ равно данному числу.

25. В данный круг вписан угол BAM. Провести в известном направлении секущую $CEDF$ (C и D на окружности, E и F на сторонах угла) так, чтобы $CE = DF$.

26. Даны две окружности. Провести в известном направлении секущую, отсекающую в окружностях хорды, отношение которых равно данному числу.

27. Даны точки A, B и C. Найти точку M такую, чтобы:

$$1)\ AM + BM = m,\quad BM + CM = n;$$

$$2)\ AM - BM = m,\quad BM - CM = n.$$

(m и n — данные отрезки).

28. Построить прямоугольный треугольник, зная гипотенузу c и медиану m_a.

29. Две окружности радиусов R и R_1 внешне касаются друг друга. Провести окружность так, чтобы она касалась обеих данных окружностей и их общей касательной.

30. Через точку A, лежащую внутри данного круга, провести хорду так, чтобы она разделилась в данной точке в отношении $m : n$ (m, n — данные отрезки).

31. На диаметре данного круга построить, как на основании, равнобедренный треугольник так, чтобы отрезок его боковой стороны от вершины до пересечения с окружностью равнялся данному отрезку a.

32. Построить прямоугольный треугольник по биссектрисе прямого угла l и гипотенузе c.

33. Через точку D, данную вне треугольника ABC, провести секущую так, чтобы сумма отрезков, прилежащих к углам A и C, была равна отрезку секущей, заключённому между сторонами.

34. Построить треугольник ABC по стороне $AB = c$, биссектрисе $BD = l$ и длине перпендикуляра, опущенного из вершины C на BD.

35. Построить равнобедренный треугольник по высоте и медиане, опущенным на одну из равных сторон.

36. Дана окружность и на ней точки M, N и P. В этих точках продолженные высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника, пересекают окружность. Построить этот треугольник.

37. В плоскости треугольника ABC построить треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника ABC, так чтобы в трапеции AA_1B_1B, BB_1C_1C и CC_1A_1A можно было вписать окружности.

38. Дан отрезок AB и прямая MN, пересекающая его. Построить треугольник ABC, для которого бы прямая MN была биссектрисой угла C.

39. Пользуясь только циркулем и линейкой, построить по двум данным вершинам квадрата две другие его вершины.

40. Построить треугольник по периметру $2p$ и углам A и B.

41. Построить треугольник по основанию, высоте и углу при вершине.

42. Построить треугольник по стороне, прилежащему углу и разности двух других сторон.

43. Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым и к данной окружности.

44. Построить все окружности данного радиуса, касательные к данной окружности и к данной прямой.

45 Построить окружности, касательные к двум данным пересекающимся прямым, и притом к одной из них в данной точке.

46. Построить окружность, касательную к данной окружности в данной на ней точке и к данной прямой

47. Построить окружность, касательную к данной прямой в данной на ней точке и к данной окружности.

48. В треугольнике ABC провести прямую $DE \| BC$ так, чтобы $BD + EC = 2DE$.

49. По одну сторону прямой CD даны точки A и B. Найти на CD такую точку M, чтобы $\angle CMA = 2 \angle DMB$.

50. Задачи Евклида из трактата „Начала“. 1) В данный круг вписать правильный пятнадцатиугольник. 2) Вписать в больший из двух концентрических окружностей правильный многоугольник с чётным числом сторон, который не касался бы меньшей окружности.

51. Задачи арабского математика Абул Вафы (940—998) из трактата „О геометрических построениях“. 1) Составить квадрат из двух квадратов, стороны которых даны. 2) Разбить данный квадрат на два квадрата при условии, что сторона одного из них дана. 3) Построить квадрат, втрое превосходящий данный.

52. Задачи арабского математика Гассана ибн Гайтема (X—XI в.). Дан неправильный четырёхугольник. Узнать, можно ли около него описать окружность, не измеряя углов.

53. **Задача итальянского математика Николо Тартальи (1499—1557).** Пользуясь одним раствором циркуля и линейкой разделить отрезок на любое число равных частей.

54. Задача Тартальи. На данном отрезке AB построить с помощью данного раствора циркуля (не равного AB) и линейки равносторонний треугольник.

55. Задача итальянского геометра Мальфати (1731—1807). Дан треугольник. Построить три окружности так, чтобы каж-

дая из них касалась двух других окружностей и двух сторон треугольника.

56. Задача итальянского математика Маскерони (1750—1800). С помощью только одного циркуля по трём данным отрезкам построить четвёртый пропорциональный отрезок.

57. Задача бельгийского математика Каталана (1814—1894). Из точки A вне окружности провести секущую так, чтобы она разделилась окружностью пополам

58. Задача Бальтцера Построить треугольник по данному углу, противолежащей стороне и сумме других сторон.

59. Задача египетского учёного Ахмеса (XVII век). Имеем четырёхугольную доску размером 5 *дм* × 2 *дм*. Построить из этого четырёхугольника квадрат, разрезав его на четыре части. (Задача была предложена еврейскому врачу и математику Иосифу Соломону Дель Медичо)

60 Задачи Штейнера. 1) В плоскости чертежа дана окружность, опустить из данной точки перпендикуляр на данную прямую с помощью одной только линейки.

2) На прямой даны три точки A, C и B, из которых C лежит посредине между A и B. Нужно при помощи только линейки провести через произвольную точку D прямую, параллельную данной прямой

61. Показать, что из всех треугольников с одинаковыми основаниями и равными высотами наибольший угол при вершине у равнобедренного треугольника.

62. Указать характеристическую особенность треугольников, отличающихся тем, что периметр всякого вписанного в них прямоугольника, две вершины которого лежат на определённых сторонах, есть величина постоянная.

63. В данный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю

64. Через точку M, данную на общей хорде двух кругов, провести в каждом из них наименьшую хорду.

65. Найти наибольшее значение высоты, опущенной на данное основание a треугольника с данным периметром $2p$.

66. Доказать, что из всех прямоугольников с одним и тем же периметром наибольшая площадь у квадрата.

67. Доказать, что из всех треугольников с одинаковыми периметрами равносторонний имеет наибольшую площадь.

68. Через точку внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

69 В точках A и B находятся источники света в S_1 и S_2 свечей. На отрезке AB найти наименее освещённую точку.

70. Задача Торичелли (1608—1647)—ученика Галилея. В плоскости данного треугольника найти точку T, сумма расстояний которой до вершин треугольника наименьшая. (Точка T называется точкой Торичелли).

71. Задача Вивиани (1622—1703)—ученика Галилея. Даны

две параллельные прямые AB и CD, расстояние между которыми равно a, и точки M и N соответственно на AB и CD. На AB откладывают отрезок $ME = b$. Через какую точку F отрезка MN надо провести прямую из точки E, чтобы сумма площадей треугольников MEF и NFK (K — пересечение EF с прямой CD) была наименьшей?

72. Задачи Штейнера. 1) Доказать, что из всех треугольников одного и того же периметра и основания равнобедренный имеет наибольшую площадь.

2) Доказать, что если дано по одному катету двух прямоугольных треугольников и известна сумма двух других катетов, то сумма гипотенуз наименьшая в случае подобия треугольников.

73. Задача английского математика Кэзи (XIX в.) В плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от сторон треугольника была бы минимальной.

§ 5. Стереометрические задачи.

1. Доказать, что сумма расстояний от любой точки основания правильной пирамиды до её боковых граней есть величина постоянная.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 26 *дм*, диагонали граней его равны $6\sqrt{17}$ *дм*. Определить объём параллелепипеда.

3. Из вершины C треугольника ABC восставить к плоскости треугольника ABC перпендикуляр $CD = 5$ *см*. Вычислить расстояние точки D от стороны AB, если $AB = 14$ *см*, $BC = 13$ *см*, $AC = 15$ *см*.

4. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

5. Пересечь данный трёхгранный угол так, чтобы в сечении получился ромб

6. Куб пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный n-угольник Показать, что возможны только $n = 3; 4; 6$.

7. В пространстве расположены шар и прямая. Через эту прямую проходят плоскости, пересекающие шар. Найти геометрическое место центров, получающихся в сечении кругов.

8. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором ребро AB перпендикулярно к плоскости основания BCD; причём $AB = CD = a$. Тетраэдр пересечён плоскостью $MNPQ$, параллельной AB и CD. Доказать, что сечение $MNPQ$ есть прямоугольник и периметр этого прямоугольника при различных его положениях остаётся постоянным. Найти положение точки M на AC, если сечение $MNPQ$ — квадрат.

9. В конический сосуд с осевым сечением в виде равностороннего треугольника налита вода и в неё положен металлический шар радиуса r. Воды оказалось столько, что её уровень коснулся шара сверху. На какой высоте был уровень воды в сосуде до опускания в него шара?

10. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, ребро которого равно a. На AC дана точка E на расстоянии m от точки C и на AD — точка F на расстоянии n от точки D. Вычислить стороны треугольника BEF.

11. Треугольная пирамида $OABC$ имеет прямой трёхгранный угол при вершине O, причём $OA = OB = 12$ *см*, $OC = x$. Вычислить x при условии, что радиус сферы, вписанной в тетраэдр $OABC$ равен 3 *см*. Вычислить при этом условии площадь треугольника и расстояние от точки O до плоскости ABC.

12. В конус высотой h вписан шар, а в шар — равносторонний конус. Найти полную поверхность бо́льшего конуса, если объём его в $7\frac{1}{9}$ раз больше объёма меньшего конуса.

13. Через середины трёх рёбер куба, выходящих из каждой вершины, проводят секущие плоскости. Найти полную поверхность и объём тела, оставшегося после удаления всех получившихся пирамид, если ребро куба равно a.

14. Объём правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равен 1 300 *см*^{3}, сторона нижнего основания $a = 15$ *см*, высота $h = 12$ *см*. Вычислить боковую поверхность усечённой пирамиды и объём дополнительной пирамиды.

15. Шар радиуса R пересечь плоскостью так, чобы площадь сечения равнялась разности поверхностей отсечённых частей.

16. Дан конус с радиусом основания $R = 4$ *м* и высотой $H = 12$ *м*. Определить размеры цилиндра, вписанного в конус, если его поверхность имеет наибольшее из возможных значений. Вычислить поверхность и объём этого цилиндра.

17. В правильной четырёхугольной пирамиде боковая поверхность равна a^2. Определить максимальный из возможных объёмов пирамиды.

18. Периметр равнобедренного треугольника $2p$. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объём тела, образованного вращением треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

19. Отрезок a разделён на два отрезка; на каждом из них построено по равностороннему треугольнику, и вся фигура вращается вокруг данного отрезка. В каком отношении надо разделить отрезок a, чтобы объём тела вращения был наименьшим.

20. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция. Найти минимум поверхности и объём тела, полученного от вращения трапеции вокруг бо́льшего основания.

21. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершённый сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объём его равен v?

22. Найти наибольшую боковую поверхность и наибольший объём конуса, если:

1) $r + l = a$ — постоянная,

2) $r + h = a$ — постоянная.

(r, h и l — соответственно радиус основания, высота и образующая конуса).

23. В шар радиуса R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

24. В шар радиуса R вписать цилиндр с наибольшим объёмом.

25. В полушар радиуса R вписать параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объема.

26. Кровельщик желает сделать открытый жёлоб наибольшей вместимости, у которого бы дно и бока были плоские шириной в 10 *см*. Какова должна быть ширина жёлоба сверху, если бока наклонены ко дну одинаково?

27. Каковы должны быть размеры консервной банки, имеющей наибольший объём при заданной поверхности S?

28. Определить отношение высоты конического шатра к радиусу основания при условии, что его поверхность наименьшая при заданной вместимости.

29. Бак цилиндрической формы должен вмещать v литров воды. Каковы должны быть его размеры, чтобы поверхность без крышки была наименьшая?

30. Задача Архимеда. Из трактата „Леммы“. Найти шар, имеющий объём, равный объёму данного конуса или цилиндра.

31. Задача Архимеда из этого же трактата. Отрезать от шара плоскостью такой сегмент, чтобы отношение его объёма к объёму конуса, имеющего основание и высоту сегмента, было данное.

32. Правило Нипсуса (около II века н. э.). В Эрфуртском кодексе (рукописи примерно II века) приводится правило Нипсуса для определения вместимости бочек по формуле:

$$v = \frac{11}{14}\left(\frac{D_0 + D_1 + D_2}{3}\right)^2 H,$$

где H — высота бочки, а D_0, D_1 и D_2 — диаметры, измеренные в нижней, средней и верхней частях бочки. Узнать, каким

приближённым значением π пользовались римляне, принимая за объём бочки объём цилиндра с той же высотой и с радиусом основания, равным среднему арифметическому радиусов оснований и среднего сечения.

33. Правило из трактата „Венец астрономического учения" индийского математика Бхаскара-Акариа. Для вычисления объёма шара через его диаметр Бхаскара дает формулу:

$$v = \frac{D^3}{2} + \frac{1}{21} \cdot \frac{D^3}{2}.$$

При каком приближённом значении π справедливо правило Бхаскары?

34. Задача из „Трактата по геометрии" французских математиков Э. Руше и Ш. Комберусса (XIX в.). Высота усечённого конуса 3 *м*, а радиусы его оснований 1 *м* и 2 *м*. Разделить объём на три части, пропорциональные числам 2, 3 и 7, двумя плоскостями, параллельными основаниям.

35. Задача, предложенная при испытаниях на степень бакалавра во французской школе. Четверть круга AOB вращается около радиуса OB. На каком расстоянии OP от центра O надо провести прямую PD, параллельную прямой OA, чтобы кольцо, описанное отрезком CD, отсекаемым между хордой AB и окружностью, имело данную площадь πm. Найти максимум этой площади при изменении расстояния OP от O до $OB = a$.

Глава четвёртая

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Тождественные преобразования.

Доказать следующие тождества:

1. $\sin(60° - a)\cos(30° + a) + \cos(60° - a)\sin(30° + a) = 1$.

2. $\cos(a - b)\cos(a + b) - \sin(a - b)\sin(a + b) = \cos 2a$.

3. $\cos^6 a + \sin^6 a = \cos^2 2a + \frac{1}{2}\sin^2 2a$

4. $\dfrac{\cos^2 2a - 4\cos^2 a + 3}{\cos^2 2a + 4\cos^2 a - 1} = \operatorname{tg}^4 a$

5. $\dfrac{\sin 3a + \sin^3 a}{\cos^3 a - \cos 3a} = \operatorname{ctg} a$

6. $1 + \cos 2a \cos 2b = 2\sin^2 a \sin^2 b + 2\cos^2 a \cos^2 b$

7. $4 \sin^3 a \cos 3a + 4\cos^3 a \sin 3a = 3 \sin 4a$

8. $\sin (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \cos a_1 \cos a_2 \cdots \cos a_n [S_1 - S_3 + \cdots]$,

где S_1 — сумма тангенсов данных аргументов, $\cdots$
$S_к$ — сумма произведений тангенсов этих же аргументов, взятых по $к$.

9. $\cos (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$

$= \cos a_1 \cos a_2 \cdots \cos a_n [1 - S_2 + S_4 - \cdots]$,

где $s_к$ — то же самое, что в № 8.

10. $\sin na = \cos a^n (C_n^1 \operatorname{tg} a - C_n^3 \operatorname{tg}^3 a + \cdots)$.

11. $\cos na = \cos^n a (1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 a + C_n^4 \operatorname{tg}^4 a - \cdots)$.

12. $\sin a + \sin (a + b) + \cdots + \sin [a + (n-1) b] =$

$$= \frac{\sin (a + \frac{n-1}{2} b) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}.$$

13. $\cos a + \cos (a+b) + \cos (a+2b) + \cdots + \cos [a+(n-1)b] =$

$$= \frac{\cos (a + \frac{n-1}{2} b) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}.$$

14. $\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \cdots + \sin na =$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} a \cdot \sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}}.$$

15. $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots \cos na =$

$$= \frac{\cos \frac{n+1}{2} a \cdot \sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}}.$$

16. $\sin a + \sin 3a + \cdots + \sin\ (2n-1)\,a = \dfrac{\sin^2 na}{\sin a}$.

17. $\cos a + \cos 3a + \cdots + \cos\ (2n-1)\,a = \dfrac{\sin 2na}{2\sin a}$.

18. $\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 4a + \cdots + \operatorname{cosec} 2^n a =$

$= \operatorname{ctg}\dfrac{a}{2} - \operatorname{ctg} 2^n a$.

19. $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1 - 2\sin a \sin b \sin c$,

при $a + b + c = \dfrac{\pi}{2}$.

20. $\sin^4 \dfrac{\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{3\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{7\pi}{8} = \cos^4 \dfrac{\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{3\pi}{8} +$

$+ \cos^4 \dfrac{5\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{7\pi}{8}$.

21. $\dfrac{\sin^8 a}{m^3} + \dfrac{\cos^8 a}{n^3} = \dfrac{1}{(m+n)^3}$,

если $\dfrac{\sin^4 a}{m} + \dfrac{\cos^4 a}{n} = \dfrac{1}{m+n}$.

22. $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d =$

$= 4\ (\cos a \cdot \cos b \cos c \cos d - \sin a \sin b \sin c \sin d)$, если $a + b + c + d = 0$.

23. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

24. $\sin\left(2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right) = \dfrac{2ab\sqrt{m\,n}}{a^2 m + b^2 n}$.

25. $4 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$ (равенство Мехина[1]).

---

[1]). С помощью этого равенства Мехина и разложения в ряд $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{5}$ и $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{239}$ английский математик Шенкс вычислил число π с точностью до 707 десятичных знаков.

26. $\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sqrt{3}}{4-a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a-1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, где $1 < a < 4$

27. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

28. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$

29. $2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg} \frac{1-x^2}{2x}$, где $x > 0$

30. $\arccos x + \arccos y = \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$

Доказать для треугольника следующие равенства.

31. $\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A = \sin^2 A$

32. $\cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = \sin^2 A$

33. $4 \cos^2 A \cos^2 B - \cos(A-B)(3 \cos A \cos B - \sin A \sin B) = \cos^2 C$

34. $\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$

35. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

36. $b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2)$, если $\angle A = 120°$

37. Доказать, что если для треугольника имеет место равенство

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

то он прямоугольный.

38. Доказать, что если в треугольнике $a + c = bn$, то

1) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{n+1}{n-1}$

2) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{2}{n-1}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$.

3) $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{n-1}\frac{1}{r_b}$

4) $r_b=\frac{n+1}{n-1}r$

39. Доказать, что

$$\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2},$$

если $a+b+c+d=2\pi$.

40. Доказать, что если для углов треугольника существует такой острый угол α, что

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C,$$

то справедливо равенство:

$$\sin^3\alpha=\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha).$$

41. Доказать для треугольника равенство:

$$S=r^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+2Rr\sin A$$

42. Доказать, что если в треугольнике ABC имеет место соотношение $b^2-c^2=2aR$, то $B-C=90°$.

43. Доказать, что если в треугольнике периметр втрое больше какой-либо стороны, то котангенсы половин углов треугольника составляют арифметическую прогрессию.

44. Доказать для треугольника тождество:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1.$$

45. Доказать, что если $\sin A$, $\sin B$ и $\sin C$ составляют арифметическую прогрессию, то и $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ также образуют арифметическую прогрессию (A, B, и C — углы треугольника).

46. Доказать, что если

$$a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a + b) \operatorname{tg} \frac{A + B}{2},$$

то треугольник ABC равнобедренный.

47. Стороны треугольника ABC связаны соотношением: $a^2 = c(b + c)$. Доказать, что угол A вдвое больше угла C.

48. Доказать, что биссектриса треугольника ABC

$$б_A = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}.$$

Пользуясь этой формулой, доказать, что треугольник с двумя равными биссектрисами — равнобедренный.

49. Доказать, что во всяком треугольнике имеют место равенства:

1) $b \cos A + a \cos B = c$

2) $bc \cos A - ac \cos B = b^2 - a^2$

50. Если котангенсы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию, то квадраты сторон треугольника также составляют арифметическую прогрессию. Доказать.

51. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место соотношение:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{6RC}.$$

52. Отношение сторон треугольника

$$a : b : c = (2m + 1) : (m^2 - 1) : (m^2 + m + 1)$$

Доказать, что один из углов треугольника равен 120°.

Вычислить значения следующих выражений (53—63).

53. $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$.

54. $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$.

55. $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$.

56. $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

57. $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$. 58. $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$.

59. $\left(2 \sin \frac{\pi}{16}\right)^{16} + \left(2 \cos \frac{\pi}{16}\right)^{16}$.

60. $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ$.

61. $(\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 2a \operatorname{cosec} 3a + \cdots + \operatorname{cosec}(n-1)\, a \operatorname{cosec} na$

62. $\sec a_1 \sec a_2 + \sec a_2 \sec a_3 + \cdots + \sec a_n \sec a_{n+1}$

если $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью α.

63. $\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1 + 1 \cdot 2x^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1 + 2 \cdot 3x^2} +$

$+ \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1 + 3 \cdot 4x^2} + \cdots + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1 + n(n+1)x^2}$

64. Вычислить углы треугольника ABC, если

$$A + C = 2B,\ C - A = \frac{\pi}{3}.$$

65. Установить вид треугольника ABC, если

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}.$$

66. Для треугольника имеет место соотношение:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

Какому условию удовлетворяют углы такого треугольника?

67. Найти площадь сегмента, дуга которого содержит α°, а хорда равна a.

68. Найти углы треугольника, зная, что они образуют арифметическую прогрессию и что наибольшая сторона его c вдвое больше наименьшей стороны a.

69. Определить углы ромба, если его периметр в 1,5 раза больше суммы диагоналей.

70. Проверить для треугольника равенство:

$$\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C = \frac{1}{abc}\left(\frac{c}{\cos B}+\frac{b}{\cos C}-a\right)\left(\frac{a}{\cos C}+\right.$$

$$\left.+\frac{c}{\cos A}-b\right)\left(\frac{b}{\cos A}+\frac{a}{\cos B}-c\right).$$

71. Высота, биссектриса и медиана треугольника ABC, проведенные из вершины A, делят этот угол на четыре равные части. Найти угол A.

72. Исключить x и y из следующих систем уравнений:

1) $\sin x \sin y = a$; $\cos x \cos y = b$; $x + y = c$.

2) $a \sin^2 x + b \cos^2 x = m$; $b \sin^2 y + a \cos^2 y = n$; $a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y$.

73. Исключить x, y и z из равенств:

$$x + y + z = \alpha: \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = a;$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x = b; \ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = c$$

74. Исключить α, β из равенств:

$$x = a \sin \alpha \cos \beta; \ y = a \sin \alpha \sin \beta; \ z = a \cos \alpha$$

75. В треугольнике ABC дано:

$$\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = 1 : 2 : 3.$$

Найти синусы углов.

76. Показать, что площадь четырёхугольника, у которого сумма двух сторон равна сумме двух других сторон,

$$S = \sqrt{abcd} \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$$

(a, b, c, d — стороны, β и γ — противоположные углы четырёхугольника).

Когда получается максимум площади данного здесь вида четырёхугольников?

77. Вычислить следующие суммы:

1) $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \cdots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n}$

2) $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{5\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}$

3) $\sin^2 a+\sin^2(a+b)+\sin^2(a+2b)+\cdots+\sin^2(a+nb)$

4) $\cos^2 a+\cos^2(a+b)+\cos^2(a+2b)+\cdots+\cos^2(a+nb)$

5) $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+2^2\operatorname{tg}2^2\alpha+2^3\operatorname{tg}2^3\alpha+\cdots+2^n\operatorname{tg}2^n\alpha$.

6) $\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2+\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3+\cdots+\operatorname{tg}a_n\operatorname{tg}a_{n+1}$,

где $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ члены арифметической прогрессии с разностью α.

78. Найти периоды следующих функций:

1) $\operatorname{tg}(x+1)$; 2) $\sin x+\cos(x-\varphi)$; 3) $\sin 2x+\cos x$;

4) $\sin x\sin(x+\varphi)$; 5) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}3x$; 6) $\cos^3 x$;

7) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)$; 8) $1-\sin x\cos x$; 9) $\cos(2\arcsin\sqrt{\sin x})$.

79. Являются ли периодическими следующие функции?

1) $\cos^2 x$; 2) $\sin(x^2+1)$; 3) $\operatorname{tg}x-\sin 2x$;

4) $\cos x\sin 2x$; 5) $\lg\sin x+\lg\cos x$

§ 2. О решении тригонометрических уравнений.

1. Решение простейших уравнений.

Простейшими называются уравнения:

$$\sin x=a \quad (-1\leqslant a\leqslant 1)$$

$$\cos x=b \quad (-1\leqslant b\leqslant 1)$$

$$\operatorname{tg}x=c \quad (-\infty<c<\infty)$$

$$\operatorname{ctg}x=d \quad (-\infty<d<\infty)$$

Решения уравнения $\sin x = a$, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, находятся по формуле:

$$x = \kappa\pi + (-1)^{\kappa} \cdot \arcsin a \qquad (1)$$

Корни уравнения $\cos x = b$, если $-1 \leqslant b \leqslant 1$, отыскиваются по формуле:

$$x = 2\kappa\pi \pm \arccos b \qquad (2)$$

Для уравнений $\operatorname{tg} x = c$ и $\operatorname{ctg} x = d$ формулы решения одинакового вида:

$$x = \kappa\pi + \operatorname{arc\,tg} c \quad (3) \text{ и } \quad x = \kappa\pi + \operatorname{arc\,ctg} d \qquad (4)$$

(Во всех этих формулах κ принимает целые значения).

II. Решение произвольных уравнений.

Чтобы решить какое-нибудь тригонометрическое уравнение, нужно свести его к простейшим уравнениям. Для этого имеется ряд способов. Рассмотрим основные из них.

1) Решение уравнений, левая часть которых есть произведение тригонометрических функций, а правая — равна нулю.

В этом случае каждый из сомножителей приравнивается нулю. Получается система уравнений вида (А), каждое из которых решается по соответствующей формуле. Если среди сомножителей имеется функция, которая для некоторых значений аргумента теряет смысл, то полученные корни подлежат проверке.

Пример. $\sin 3x \operatorname{ctg} x = 0$.

Это уравнение распадается на два уравнения:

$$\text{а) } \sin 3x = 0$$

$$\text{б) } \operatorname{ctg} x = 0$$

Решим каждое из них.

а) $\sin 3x = 0$. По формуле (1) будем иметь:

$$3x = \kappa\pi + (-1)^{\kappa} 0.$$

Следовательно, $3x = \kappa\pi$, где κ — целое число. Итак, первое уравнение дает

$$x_1 = \frac{\pi}{3}\kappa$$

б) $\operatorname{ctg} x = 0$. По формуле (4)

$$x = \kappa_1\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2\kappa_1 + 1).$$

Если среди корней первого уравнения окажутся кратные π, то их нужно отбросить, ибо для таких x котангенс не существует. В выражении $x_1 = \frac{\pi}{3}\kappa$ получаются кратные π, если κ кратно 3, т. е. $\kappa = 3m$ (m — целое число). Поэтому берем

$$x_1 = \frac{\pi}{3}(3m \pm 1).$$

Итак, наше уравнение имеет решения:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}(3m \pm 1)$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2}(2\kappa + 1)$$

(m и κ — целые числа).

2) Использование условий равенства двух одинаковых функций.

а) Если $\sin x = \sin y$, то $x = \kappa\pi + (-1)^{\kappa} y$ или $x + y = (2\kappa + 1)\pi$; $x - y = 2\kappa\pi$.

б) Если $\cos x = \cos y$, то $x = 2\kappa\pi \pm y$ или $x \pm y = 2\kappa\pi$.

в) Если $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$, то $x = \kappa\pi + y$ или $x - y = \kappa\pi$.

Эти условия используются при решении уравнений вида:

$$\sin nx = \sin mx;\ \cos nx = \cos mx;\ \operatorname{tg} nx = \operatorname{tg} mx.$$

Пример. $\sin 2x = \sin 5x$. Испозьуя условие а), будем иметь

$$2x = \kappa\pi + (-1)^{\kappa} 5x. \text{ Или } 1)\ 5x - 2x = 2\kappa\pi;$$

$$2)\ 5x + 2x = (2\kappa + 1)\pi.$$

Отсюда: $x_1 = \frac{\kappa\pi}{3}$ и $x_2 = \frac{\kappa\pi}{7}$.

Эти же условия могут быть использованы для уравнений вида:

$$\sin nx = \cos mx;\ \operatorname{tg} nx = \operatorname{ctg} mx.$$

Для этого достаточно одну из функций заменить по формулам приведения сходственной функцией. Тогда мы получим равенство одноимённых функций.

3) Метод подстановки.

Некоторые тригонометрические уравнения сводятся к алгебраическим с помощью подстановки. Решая алгебраическое уравнение, мы приходим затем к одному или нескольким из простейших уравнений. Например, пусть дано уравнение $8\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$. Делаем подстановку $\cos x = y$. Получим алгебраическое уравнение $8y^2 + 2y - 3 = 0$. Корни его будут $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = -\frac{3}{4}$. Теперь получаем два простейших уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{3}{4}$. Корни последних и будут корнями исходиого уравиения. Особенно часто применяется так называемая универсальная подстановка $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Так как $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, то любое уравнение, содержащее только эти функции, такой подстановкой приводится к алгебраическому. Решив последнее, мы получаем простейшие тригонометрические уравнения.

Пример. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$;

$$\frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1;$$

$$2\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2};$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1;\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{6};\ x = \frac{\pi}{3}(6k+1).$$

Если в уравнении, содержащем $\sin x$ и $\cos x$, $\cos x$ входит в чётных степенях, то с помощью формулы $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ можно получить алгебраическое уравнение относительно $\sin x$. Аналогично можно поступить, если в чётных степенях входит $\sin x$.

Возможны и другие рационализирующие подстановки. Полезно знать следующие общие правила для подстановок: а) если тригонометрическое уравнение не меняет знака при подстановке вместо аргумента x одного из выражений $(\pi - x)$, или $(-x)$, или $\pi + x$, то за вспомогательную функцию нужно принять соответственно $\sin x$, $\cos x$ или $\operatorname{tg} x$.

б) Если тригонометрическое уравнение при указанной замене меняет свой знак, то за вспомогательную функцию надо принять $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Пример 1. $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$

Подстановка $\pi - x$ вместо x не меняет знака уравнения. Поэтому применяется подстановка $y = \sin x$.

Пример 2. $\sec x = 4\sin x + 6\cos x$.

Подстаиовка $\pi + x$ вместо x не меняет знака уравнения. Поэтому лучше применить подстановку $y = \operatorname{tg} x$. Разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим: $\frac{1}{\cos^2 x} = 4\operatorname{tg} x + 6$. Или $1 + \operatorname{tg}^2 x = 4\operatorname{tg} x + 6$, $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0$.

4) Однородные уравнения.

Если сумма показателей степеней $\sin x$ и $\cos x$ для всех слагаемых одинакова в обеих частях уравнения, то оно называется однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Одиородные уравнения решаются так: все члены переносятся по одну сторону от знака равенства, выносится за скобки $\sin x$ или $\cos x$ в степени, равной показателю однородности; получается алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$ или $\operatorname{tg} x$.

Пример. 1. $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$;

$$\cos^2 x(2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 3) = 0;\ \cos x \neq 0 \text{ (почему?)};$$

$$2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 3 = 0. \text{ И т. д.}$$

К однородным уравнениям могут быть сведеиы уравнения вида

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d.$$

Для этого нужно использовать тригонометрическую единицу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Используя это тождество, можно последнее уравнение переписать так:

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

или $(a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0$. Это уравнение уже однородное, показатель однородности его равен 2.

Пример. 2. $3\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 10\cos^2 x = 2$.

Или $3\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 10\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$. (Решить самим).

6) Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c\ (c \neq 0)$. Разделим обе части уравнения на a.

$$\text{Тогда}\quad \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}.$$

Введем вспомогательный угол $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Наше уравнение перепишется так:

$$\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x = \frac{c}{a} \quad \text{или}$$

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

Выражение $\frac{c}{a}\cos\varphi$ есть некоторое число. Обозначим его через p.

Если $|p| > 1$, то наше уравнение решения не имеет. Если же $|p| \leqslant 1$, то мы решаем простейшее уравнение:

$$\sin(x+\varphi) = p$$

Это же уравнение можно решать универсальной подстановкой. Тогда будем иметь:

$$a\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + b\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = c \quad \text{или}$$

$$2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - b\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = c + c\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} \quad \text{или}$$

$$(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + (c-b) = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ мы найдём корни и исходного.

§ 3. Уравнения.

Решить уравнения.

1. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right).$

3. $\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x - \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = -2.$

4. $8\sin^4 x - 8\sin^2 x - \sin x + 1 = 0.$

5. $(\sin x - 5)\cos^4 x - 4(3\sin x - 5)\cos^2 x + 16(\sin x - 1) = 0.$

6. $\cos^4 x - 8\cos^2 x + 2\sin 2x \cos x - 8\sin x + 8 = 0.$

7. $\sin x = \sin(840^0 - x).$

8. $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3.$

9. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8\cos^2 x.$

10. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0.$

11. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{tg} 2x + 7.$

12. $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0.$

13. $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0.$

14. $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}.$

15. $2\sin 3x = 3\cos x + \cos 3x.$

16. $\sin\left(\frac{x}{2} - 50^0\right)\sin\left(\frac{x}{2} + 70^0\right) = \frac{1}{4}.$

17. $\sin x + \sin a + \sin b = \sin(a + b + x)$.

18. $\sin^{10}(30^0 - x) + \cos^{10}(30^0 - x) = 1$.

19. $\sin 2x = \sin(x + a)$.

20. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg}(x - a)$.

21. $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{ctg} x$.

22. $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 0$.

23. $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 16 \operatorname{ctg} 2x$.

24. $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2$.

25. $\sin 2x - 2(2\sqrt{\sin x + \cos x} - 3)\sqrt{\sin x + \cos x} = 6\sqrt{\sin x + \cos x} + 4$.

26. $(a - 1)\cos x + (a + 1)\sin x = 2$.

27. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.

28. $\cos \pi x \cos \pi(x - 1) = -1$.

29. $(\cos x - \sqrt{3}\sin x)^4 + (\sin x + \sqrt{3}\cos x)^4 = \frac{3}{4}$.

30. Решить уравнение:

$$\sin x + \sin(x + a) + \cdots + \sin(x + na) = \cos x + \cos(x + a) + \cdots + \cos(x + na),\ a \neq 0.$$

Определить все дуги x_1 удовлетворяющие уравнению при $a=3$.

31. $\operatorname{arc tg} x = \arcsin\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

32. $\arcsin x = \arcsin a + \arcsin b$.

33. $\operatorname{arc tg} x = \arccos a + \arccos b$.

34. $\operatorname{tg}(-2\operatorname{arc tg} x) = \operatorname{ctg}(2\operatorname{arc ctg} x)$.

35. $\arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

36. $3x - \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}\right) = 0.$

37. $\sin(\pi \operatorname{arc\,tg} x) = \cos(\pi \operatorname{arc\,tg} x).$

38. $\sin[\pi(\operatorname{arc\,tg} x)^2] = \frac{1}{2}.$

39. $\sin(5 \operatorname{arc\,tg} x) = 1.$

40. $2 \operatorname{arc\,tg} x + 3 \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{3\pi}{4}.$

41. $\operatorname{arc\,tg}(x+1) + \operatorname{arc\,tg}(x-1) + \operatorname{arc\,tg} x = 0.$

42. $\arcsin(1-x) - 2\arcsin x = \frac{\pi}{2}.$

43. $2 \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{3} = \pi.$

44. $\operatorname{arc\,tg} 2x + \operatorname{arc\,tg} 3x = \frac{3\pi}{4}.$

45. $\arcsin 2x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{2x} = \frac{\pi}{2}.$

46. $2 \operatorname{arc\,tg}(\cos x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sin x}\right).$

47. $\operatorname{arc\,tg}(x+1) - \operatorname{arc\,tg}(x-1) = \frac{\pi}{12}.$

48. $2\arcsin x + \arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2}.$

49. $2 \operatorname{arc\,tg}(x-1) + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$

50. $x + 2\arcsin(1 - \cos x) = \pi.$

51. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \frac{\pi}{2}.$

52. Найти натуральные решения уравнения:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}.$$

§ 4. Неравенства

1. Доказать неравенство:

$$\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c \geqslant 1, \text{ если } a + b + c = 90^\circ.$$

2. Доказать, что при всех x справедливы неравенства:

$$-\sqrt{3} \leqslant \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leqslant \sqrt{3}.$$

3. Доказать для треугольника неравенство

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} > 0.$$

4. Доказать, что при $0 < a < \pi$

$$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg} a.$$

5. Доказать, что

$$\sin^4 x - 6 \sin^2 x + 6 > 0.$$

6. Показать, что если $\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} y$ и $a > 0$, то

$$\operatorname{tg}^2 (x - y) \leqslant \frac{(a-1)^2}{4a}.$$

При каком условии имеет место знак равенства?

7. Найти все значения x из промежутка $(0, \frac{\pi}{2})$, для которых

$$\lg_{\cos x} \sin x > \lg_{\sin x} \cos x.$$

8. Найти все значения x в промежутке $(0, 2\pi)$, удовлетворяющие неравенствам:

1) $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 > 0$;

2) $2 \cos^2 x + 9 \sin x + 4 > 0$.

9. Доказать, что при всех значениях x

$$|\sin^3 x + \cos^3 x| \leqslant 1.$$

10. Доказать методом полной математической индукции неравенство:

$$\left|\frac{\sin nx}{x}\right| \leqslant n.$$

11. Доказать, что при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x).$$

12. Доказать, что если $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$, $0 < c < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin(a+b+c) < \sin a + \sin b + \sin c.$$

13. Доказать для углов треугольника неравенства:

1) $\sin A + \sin B + \sin C \geqslant \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$;

2) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

3) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

4) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}$.

14. Доказать, что при любых значениях x и постоянных a и b справедливо неравенство

$$|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

15. Решить неравенства:

1) $\sin \pi x > 0$.

2) $\cos \pi x > 0$.

3) $\operatorname{tg} 2x > \operatorname{tg} x$.

4) $\operatorname{tg} x > \frac{\operatorname{tg} 2x - 2}{\operatorname{tg} 2x + 2}$.

5) $\operatorname{ctg}\frac{\pi(x+1)}{4x} < 1$.

6) $\sin(2\pi\cos x) < 0$.

7) $\arccos x > \arccos(1 - x^2)$.

8) $\sin^4 x - 6\sin^2 x + 4 > 0$.

9) $\cos x \cos(x+a) > \sin x \sin(x+a)$. 11) $\cos x > \sin^2 x - \cos^2 x$.

10) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x > 1 + \operatorname{tg} x$. 12) $\sin \pi x^2 > \sin \pi x$.

§ 5. Системы уравнений

Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x + \cos y = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2} \sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = a, \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = b \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}, \\ x + y = 75°. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sin \pi x \sin \pi y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos \pi x \cos \pi y = \sqrt{2} - \frac{1}{2}. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} y = \frac{3}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sin 2\pi x = 2 \sin 2\pi y, \\ \cos 2\pi x = -2 \cos 2\pi y. \end{cases}$

§ 6. Задачи на нахождение крайних значений (экстремумов) функций.

1. Найти наибольшее значение произведения $\cos A \cos B$, где A и B — острые углы прямоугольного треугольника.

2. Пусть A, B и C — углы треугольника. Вычислить:

1) наибольшее значение произведения:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

2) наименьшее значение суммы:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}.$$

3. Найти крайние значения функций:

1) $y=\sin x\cdot\sin(x+a)$.

2) $y=\sin x+\cos(x-a)$.

3) $y=\sqrt{3}\cdot\sin 2x+\cos 2x$.

4) $y=2\cos^2 x-2\cos x-1$.

5) $y=a\cos^2 x+b\cos x\cdot\sin x+c\cdot\sin^2 x$.

6) $y=\dfrac{a\cdot\operatorname{tg}x-b\cdot\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}2x}$, $ab>0$.

7) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}$.

4. Найти наибольшее значение функции:

$$z=x-y,$$

если $\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}y$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

5. Найти наибольшее значение функции:

$$y=\sin^{2a}x\cdot\cos^{2b}x,$$

если $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, a и b — положительные рациональные числа.

6. Найти крайние значения функции:

$$y=a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{ctg}^2 x,$$

если $ab>0$.

7. Найти крайние значения функций:

1) $y=a\sin x+b\operatorname{coses}x$;

2) $y = a\cos x + b\sec x$,

если $ab > 0$, $|a| \geqslant |b|$.

8. Найти наибольшее значение функции:

$$z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

9. Найти наименьшее значение отношения:

$$k = \frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{p^2},$$

где r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных кругов, а p — полупериметр треугольника.

10. В круг вписан ΔABC. В предположении, что сторона AB зафиксирована, доказать, что функция:

$$y = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A \cdot \sin B}$$

достигает наименьшего значения при $A = B$.

11. Найти наибольшее значение функции:

$$u = \frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 y - \sin^2 z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z},$$

если $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ и $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

12. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, который имеет наибольшую сумму квадратов сторон.

13. Чему равно наименьшее значение отношения:

$$k = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s},$$

где a, b, c — стороны, а s — площадь треугольника?

14. Найти крайние значения функций:

1) $y = a\sin^2 x + b\cos^2 x$;

2) $y = a\sin^2 x + b\cos^4 x$; $ab > 0$, $|a| \leqslant 2|b|$.

3) $y = a\sin^4 x + b\cos^4 x$; $a + b \neq 0$.

4) $y = a\sin^4 x - b\cos^2 x \cdot \sin^2 x + c\cos^4 x$, $a + b + c \neq 0$.

15. Пусть дано множество неотрицательных функций вида:

$$y = a + b\cos x + c\cos 2x,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a < b$, [$y \geqslant 0$ при всех значениях x. Например, $y = 3 + 4\cos x + 2\cos 2x = (1 + 2\cos x)^2$]. Найти наименьшее значение отношения:

$$k = \frac{a + b + c}{b - a}$$

для всего рассматриваемого множества функций.

16. Показать неограниченность функций:

1) $y = \sec x + \operatorname{tg} x$;

2) $y = \sec x - \operatorname{tg} x$;

3) $y = \operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x$;

4) $y = \operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x$.

17. Найти крайние значения функций:

1) $y = a\operatorname{ces} x + b\operatorname{tg} x$, $|a| > |b|$;

2) $y = a\operatorname{cosec} x + b\operatorname{ctg} x$, $|a| > |b|$.

18. Доказать, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр у правильного треугольника.

19. Найти крайние значения функций:

1) $y = \cos A + \cos B + \cos C$;

2) $y = \sin A + \sin B + \sin C$;

3) $y = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

4) $y = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$;

5) $y = \sin A \sin B \sin C$;

6) $y = \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$;

7) $y = \sin A + \sin B + \sin C - \sin 2A - \sin 2B - \sin 2C$;

A, B и C — углы треугольника.

20. Найти крайние значения функций:

$$1)\ y = \frac{a + b \sin^2 x}{\cos^2 x};$$

$$2)\ y = \frac{a + b \cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

§ 7. Задачи по геометрии с применением тригонометрии.

1. Диаметр монеты равен 1 *см*. Диаметр Луны виден с Земли под углом 31′. На каком расстоянии от глаза наблюдателя следует поместить монету, чтобы она в точностн закрыла лунный диск?

2. Решить треугольник, если $a : b : R = m : n : \kappa$.

3. Вычислить углы ромба, сторона которого есть средняя пропорциональная между его диагоналями.

4. Две окружности радиусов r и R пересекаются. Их общая хорда равна a. Вычислить площадь общей части этих кругов.

5. По данным углам треугольника определить угол между медианой и биссектрисой, проведёнными из одной вершины.

6. Доказать, что из всех трапеций, имеющих три данные равные стороны, наибольшую площадь имеет равнобочная трапецня, у которой угол при основании равен 60°.

7. В круге радиуса R проведён радиус OA и на нём отложен отрезок OB, равный a, причём $OB < R$. Определить наибольший из вписанных в этот круг углов, опирающихся на OB.

8. Даны основание a треугольника и сумма m боковых сторон. Определить наибольшее значение угла A.

9. Треугольник ABC вписан в круг. Сторона $BC = a$ и стягивает дугу α. Выразить периметр треугольника через один из углов, прилежащих к стороне BC. При каком условии периметр треугольника будет наибольшим?

10. В данный круг вписан угол данной величины. Когда сумма образующих его хорд будет наибольшей?

11. Найти объём прямого кругового конуса, если образующая его l, а хорда развёртки боковой поверхности равна стороне правильного вписанного треугольника.

12. Сектор круга радиуса r с углом в α градусов свёрнут в виде конуса. Определить угол между образующей и основанием.

13. В конус вписан полушар так, что плоская сторона его лежит на основании конуса, а выпуклая сторона касается всех образующих. По длине образующей l и углу α между образующей и основанием найти объём полушара.

14. Основанием призмы служит ромб со стороной a и углом α. Боковые рёбра имеют длину b и наклонены к основанию под углом β. Определить объём призмы и площадь перпендикулярного сечения.

15. Каждое ребро параллелепипеда равно a. Углы между рёбрами, сходящимися в одной из вершин, острые и все равны α. Найти объём параллелепипеда.

16. В наклонном параллелепипеде с прямоугольным основанием даны длины рёбер и углы, образуемые боковым ребром со сторонами основания. Найти объём параллелепипеда.

17. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда проведена плоскость, параллельная диагонали основания, не пересекающей эту диагональ параллелепипеда. По сторонам основания a, b и высоте $2h$ определить внутренние углы фигуры, по которой плоскость пересекает параллелепипед.

18. Через среднюю линию основания правильного тетраэдра с ребром a проведена плоскость, пересекающая два боковых ребра и наклонённая к основанию под углом α. Определить площадь сечения.

19. Прямой трёхгранный угол с вершиной O пересечён плоскостью В сечении образовался треугольник ABC.
Доказать, что

$$\operatorname{ctg} A : \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C = OA^2 : OB^2 : OC^2.$$

20. Найти соотношение, связывающее сумму двугранных углов тетраэдра с суммой его трёхгранных углов.

21. При фотографировании обратной стороны Луны автоматическая межпланетная станция находилась от Луны на расстоянии приблизительно равном 65 000 *км*. Под каким углом была видна в это время Луна и какую часть её полусферы в процентах можно было видеть с указанного расстояния, если радиус Луны равен 1740 *км*?

22. На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом.

23. Определить объём тела, полученного от вращения сегмента вокруг диаметра, параллельного его хорде. Указать особенность этого объёма.

24. Периметр прямоугольного треугольника $2p = 27{,}43$ *м*, один из углов $\alpha = 41°16'$. Определить объём тела, полученного от вращения треугольника около гипотенузы.

25. Прямоугольная трапеция с основаниями 540 *см* и 360 *см* и острым углом при большем основании 47° вращается вокруг оси, проведённой через вершину данного острого угла параллельно высоте трапеции. Вычислить объём тела вращения.

26. Ромб со стороной a и острым углом α вращается около оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно к его стороне. При каком α объём тела вращения имеет наибольшее значение?

27. Боковое ребро a правильной n-угольной пирамиды образует с основанием угол α. При каком α объём пирамиды имеет наибольшее значение?

28. Апофема правильной n-угольной пирамиды равна a. Угол наклона боковых граней к основанию равен α. При каком α объём пирамиды имеет наибольшее значение?

29. В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

30. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

31. **Задачи Руше и Комберусса.** 1) Найти отношение объёмов, получаемых при последовательном вращении параллелограмма около каждой из двух смежных сторон. 2) Объёмы, получаемые от вращения прямоугольника около каждой из его сторон, соответственно равны a^3 и b^3. Найти длину диагонали прямоугольника.

ОТВЕТЫ

Глава I.

§ 1.

1. Два лица получают по две полные, три полуполные, три пустые бочки, а третье лицо получает одну полную, пять полуполных и две пустые бочки. 2. Цена на билеты снижена на 4 коп. 3. 30 *л* и 60 *л*. 4. Младшему 21 год, старшему 28 лет. 5. Сыну 9 лет. 7. 30 часов и 20 часов. 8. 60 яиц и 40 яиц. 15. a=2, в −8, с −6. 16. 772344. 17. 1035. 18. 450. 19. Задачи решаются одинаково. Решим, например, вторую из них:

$$\underbrace{44\ldots4}_{k+1}\underbrace{88\ldots8}_{k}9 = 4\cdot\frac{10^{k+1}-1}{9}\cdot 10^{k+1}+8\cdot\frac{10^{k+1}-1}{9}+1 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(4\cdot 10^{2k+2}+4\cdot 10^{k+1}-1\right) = \left(\frac{2\cdot 10^{k+1}+1}{3}\right)^2$$

Число вида $2\cdot 10^{k+1}+1$ кратно 3. Следовательно, $\left(\frac{2\cdot 10^{k+1}+1}{3}\right)^2$ есть квадрат целого числа.

23. 38 шаров. 24. Разделить монеты на три группы: в двух по 27, а в третьей 26. Взвесим первые две на весах. При этом могут представиться два случая:

1) на весах нет равновесия. Значит, фальшивая монета находится в той группе, которая оказалась более легкой. Делим ее на три части по 9 в каждой. Сравниваем две из этих частей (второе взвешивание). Это позволяет узнать, в какой девятке находится фальшивая монета. Третьим взвешиванием мы выделяем тройку монет, среди которых одна фальшивая. Наконец, сравниваем две любые монеты из этой тройки. В случае равновесия фальшивой, очевидно, является оставшаяся. Если равновесия нет, то более легкая и есть фальшивая.

2) весы находятся в равновесии. Тогда, очевидно, фальшивая монета находится среди оставшихся 26. Разбиваем эту группу монет на три части — в двух по 9, в третьей 8. Далее поступаем так же, как в первом случае.

25. Мужу 34 года, жене 31 год, дочери 5 лет, сыну 3 года.

27. 1; 7; 2; 10; 3; 8; 4; 12; 5; 9; 6; 11.

28. Начинающий игрок должен стремиться к тому, чтобы после его хода в ящиках оставалось равное количество шариков.

29. 1 ученик, 10 очков. 30. 7 часов 50 минут.

32. Составить пару из различных кубиков и сравнивать вес этой пары с весом любой другой пары. 33. $n = 40$. 34. 41, 43, 45. 35. 3 *км*/час. 36. Сидоров. 38. „Вы местный житель?“ 39. Первый старик не мог сказать, что он

рокоманец. **45.** В пятеричной системе счисления. **46.** 1) В семеричной системе счисления. 2) В восьмеричиой системе счисления. 3) В девятеричной системе счисления. 4) В шестеричиой системе счислеиия

47. Чтобы число, записаиное в десятеричной системе, перевести в другую систему, нужио разделить его на основаиие этой системы. Полученное частиое опять разделить на основание системы. И так далее до тех пор, пока не получится частное, меньшее основания системы. Тогда последнее частное и остатки будут являться цифрами числа, записанного в системе с новым основанием, причём первый остаток — цифра единиц, второй остаток— цифра „десятков" и т. д.

В нашем примере:

$$\begin{array}{r|l} 138 & 5 \\ \hline 10 & 27 \\ \hline 38 & 25 \\ \hline 35 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & \\ \hline 5 & \\ \hline 5 & 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Число 138 в пятеричной системе запишется: 1023_5

48. Чтобы перевести число, записаиное в другой системе, в десятеричную систему, нужно записать это число в виде суммы степеней основаиия системы и затем эту сумму найти. В данном примере: $247_8 = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 7 = 167$.

Для удобства вычисления выполняются по следующей схеме:

$$\begin{array}{r} \times\ 2 \\ \quad 8 \\ \hline + \quad 16 \\ \quad\ \ 4 \\ \hline \times \quad 20 \\ \quad\ \ 8 \\ \hline + \ 160 \\ \quad\ \ 7 \\ \hline \quad 167 \end{array}$$

49. Можио сначала перевести 1024_9 в десятичную систему, а затем полученное число записать в восьмеричиой системе:

$$\begin{array}{r} \times\ 1 \\ \quad 9 \\ \hline \quad 9 \\ + \quad 0 \\ \hline \quad 9 \\ \times \quad 9 \\ \hline + \ 81 \\ \quad\ \ 2 \\ \hline \times \ 83 \\ \quad\ \ 9 \\ \hline + \ 747 \\ \quad\ \ 4 \\ \hline \quad 751 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 751 & 8 \\ \hline 72 & 93 \\ \hline 31 & 8 \\ \hline 24 & 13 \\ \hline 7 & 8 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & \\ \hline 8 & \\ \hline 11 & 8 \\ \hline 8 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Итак, $1024_9 = 1357_8$.

Можио от одиой системы счисления переходить к другой без использоваиия десятеричной системы. Но для этого нужио знать таблицу умиожения в той

системе, в которой задано число Например, переведём 132_4 в троичную систему.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
132_4 & 3 & 3 & \\
12 & 22 & 3 & \\
\hline
12 & 21 & 3 & 3 \\
12 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & & &
\end{array}$$

Итак, $132_4 = 1010_3$

50. В двоичной системе счисления имеются только две цифры· 0 и 1 Если некоторое число изображается одинаковыми цифрами в двоичной снстеме, то запись его состоит только из единиц. Но число $\underbrace{11\ldots1_2}_{к} = 2^{к-1} + 2^{к-2} + \ldots + 2 + 1$ — нечётно. Значит, в четверичной системе запись его будет иметь вид $33\ldots3_4$ (числа вида $22\ldots2_3$ — чётные) Так как искомое число двузначно, то оно может быть или $33_4 = 15$, или $333_4 = 63$ ($3333_4 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 = 255$) Оба названные числа в двоичной системе изображаются только единицами: $15 = 1111_2$; $63 = 111111_2$. Однако $15 = 17_8$, поэтому это число не удовлетворяет условию задачи. Но $63 = 77_8$. Итак, число 63 изображается одинаковыми цифрами в двоичной, четверичной и восьмеричной системах. **52.** 400.

55. $N = (a - 3) \cdot a^3 + (a - 3) \cdot a^2 + 4a + 4 = (a + 1)^2 (a - 2)^2$

56. 375; $\left(\frac{a}{d} + 1\right)\left(\frac{b}{d} + 1\right)$, d — расстояние между деревьями.

57. 23 и 12. **59.** 75 шагов. **60.** 1) Одно из решений дано в виде таблицы

I	0	0	3	0	2	2	3	0
II	0	5	2	2	0	5	4	4
III	8	3	3	6	6	1	1	4

2) Да. **61.** Чтобы целое число делилось на данное число, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений цифр числа на остатки, полученные от деления соответствующих степеней десяти на данное число, делилось на это число. Например, остатки от деления степеней десяти на 9 будут равны единице. Сумма произведений цифр числа на остатки от деления степеней десяти на 9 равна сумме цифр числа. Следовательно, число делится на 9, если сумма цифр делится на 9. **62.** 1 *Г*; 3 *Г*; 9 *Г*; 27 *Г*.

63. $\frac{18 \cdot 632 + 25 \cdot 628 + 53 \cdot 620 + 4 \cdot 640}{100}$. **64.** Решение дано в виде таблицы:

I	12	4	4	9	9	1	1
II	0	8	3	3	0	8	6
III	0	0	5	0	3	3	5

Имеется решение этой задачи с другим числом переливаний **65** 36 руб **66.** Число яблок должно делиться на 3 без остатка четыре раза. Значит, оно вида $k \cdot 3^4$, где k — натуральное число Реальное число яблок равно 81.

§ 2.

1 Рассмотреть квадраты чисел вида $N = 9a + b$ при b 2; 3; 5; 6, 8 **2.** Пусть $b = 3c$. Тогда $100a - 3c\ (100m + kl)$; a делится на 3. **3.** Положить a $N - 3A$, b $N - 5B$, $c - N - 7C$. **4** Допустить, что $14n + 3$ $a \cdot d$, $21n + 4 - b \cdot d$ при $d > 1$ и рассмотреть разность: $2(21n + 4) - (14n + 3)$ $3 - -1 = (2b - 3a)\ d$ Для первой дроби аналогично **5** Представить дробь так

$$\frac{a^2\ b^2}{a^2 + b^2} \quad a^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2} = b^2 - \frac{b^4}{a^2 + b^2}$$

6. 1) Нет такого значения n. 2) d 3, 7, 21. 3) n $-117; -21$; 8, 104

7 $\frac{m}{n}$ $\frac{a}{b}$. **8** 1) Да 2) Да. 3) Может, если $a - 2^{\alpha}$, b 5^{β} или a 5^{α}, $b - 2^{\beta}$.

9. $\frac{363}{968}$ **10.** Указание: знаменатель дроби — четное число, кратное 3

11. Указание если $a > b$, то $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} = 1$. **12** Положить a $7A + m$, b $7B + n$, где $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, $n = +1, +2, -3$ $m^2 + n^2$ не делится на 7, поэтому и $a^2 + b^2$ не делится на 7 **13** $n(n+1) - n(n-1)$ $2n$. **14** Если бы было $2n - 1 = ad$, n bd, то получили бы: $(2b - a)\ d - 1$, $d = 1$ **15.** Если число $N - P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_n^{\alpha_n}$, то число его делителей равно t $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$. В задаче $P_1 - 2$, $P_2 = 3$, P_3 7. $N = 2^{\alpha} 3^{\beta} \cdot 7^{\gamma}$; $(\alpha + 1)(\beta - 1)(\gamma + 1) - 2 \cdot 3 \cdot 7$, N $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$; $2 \cdot 3^6$ 7^2, 2^2 3 7^6, $2^2 \cdot 3^6$ 7; $2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$; $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$ **16** Нечетное число делителей имеет число, являющееся полным квадратом. Искомое число $N^2 - 39\ P + 1$, где P — простое. $(N - 1)(N - 1)$ 3 13 P $N = 196$, 1444; 1600 **17** Положить $2N = a^2 - b^2$ **18.** $x - 2abk$, y $(a^2 - b^2)\ k$, z $(a^2 + b^2)\ k$, где a и b — взаимно просты. **19** Доказать делимость на 3, 5 и 16 **20** 1) $(33-3)^n$ $+ 9 \cdot 3^n - 3^n$ 2) $N - (9 + 1)^n + 18n - 28$ $9^2 \cdot A + 9n - 1 + 18n - 28$. 3) $(8 + 1)^{n+1} - 8n - 9$ $8^2 \cdot A + (n + 1)\,8 + 1 - 8n - 9$. 4) $5(41 + 8)^{n+1}$ $+ 8^n = 41 \cdot A + 8^n \cdot 41$. 5) $(48 + 1)^n - 48n - 1$ $48^2 \cdot A - n \cdot 48 + 1 - 48n - 1$. 6) $3^{n-1} \cdot (15^n - 2^n)$. 7) $(11^3)^{2n+1} - 1$ 8) 4. $(5 + 1)^n + 5n - 4$ $5^2 \cdot A + 4$ $5n + 4 + 5n - 4$. 9) Выражение можно представить в виде: $(n-2)(n-1)n(n+1)$. Произведение любых четырёх последовательных целых чисел делится на 24. 10) Положить $n = 9a \pm k$; $k = 0; \pm 1; +2; \pm 3; \pm 4$. Установить, что $k^2 + 1$ не делится на 9 **21.** $7^4 - 1$ делится на 300, а $7^3 + 1$ делится на 11 **22.** При $n = 3k + 1$ имеем: $1 + 2 \cdot (7 + 1)^k + 4$. $(63 + 1)^k$ При $n - 3k - 1$ имеем. $1 + 2^2 \cdot (7 + 1)^{k-1} + 4^2 \cdot (63 + 1)^{k-1}$. **23** $(5^{2a-1} + 1)^4$ делится на 6^4 **24** $B = (n - 3)(n-2)(n-1)n(n-1)(n+2)(n+3)$ — произведение семи последовательных целых чисел делится на $7! = 5040$ **25.** $B = (a-2)(a-1)(3a+1)^2(a + 1)^3(a+2)(a^2+4)$ $23040 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$. **26.** N должно делиться на 17: $N = (20^n - 3^n) + (16^n - 1)$ Надо, чтобы $n = 2k$ N должно делиться на 19: $N = (20^{2k} -$

$-1)\cdot(16^{2\kappa}-3^{2\kappa})$. **27.** $B=2[(2a-3)+(2-a)]^{n+1}-(2-a)^n-(2a-3)\cdot A+(2-a)^n\cdot(4-2a-1)$ **31.** См. № 18 **32.** Достаточность: если $n=6\kappa+1$, то $B=4(6\kappa+1)^2+3(6\kappa+1)-5=6\cdot A+4+3+5$ делится на 6. Необходимость: так как $3n(n+1)+6$ всегда делится на 6, то при n^2-1, делящемся на 6, надо, чтобы было $n=6\kappa+1$ **34.** $B=(n-2)^2-(n-1)^2-n^2+(n+1)^2-(n+2)^2=5(n^2+2)$, но n^2+2 не делится на 5. B, делясь на 5, не делится на 25. **36.** Если наибольший общий делитель искомых чисел a и b равен d, то имеем $ab=1620d$ (см. № 53) и $4a=3b$, $a=405$, $b=540$. **37.** $\frac{183}{241}, \frac{184}{241}, \frac{185}{241}, \frac{186}{241}$. **38.** N^k-N делится на 9. При $k=2$ $N_1=9a$, $N_2=9a+1$, при $k=3$ $N_1=9a$, $N_2=9a+1$, $N_3=9a+1$, при $k=4$ имеем два класса чисел $N_1=9a$ и $N_2=9a+1$. Числа вида N^2-N+1 на 9 не делятся. **39.** Обозначить $p=2a+1$ и рассмотреть равенство $(2^a-1)(2^a+1)=px^2$, $a=1, 3$. **40.** Сумма всех этих цифр при делении на 9 дает такой же остаток, какой получается от деления суммы всех чисел от 1 до 10^n на 9, $S=\frac{10^n(10^n+1)}{2}$ — сумма всех натуральных чисел от 1 до 10^n.

$S=5\cdot[(10^{n-1}-1)+1][(10^n-1)+2]-(10^{n-1}-1)\cdot A+10-9=B+9+1=9k+1$. **41.** $n=2$. **42.** Если положить $ax+b=A\cdot m, cx+d=B\cdot m$, то получим $m(aB-cA)=\pm 1$, $m=+1$. **43.** Учесть, что $\underbrace{aa\cdots a}_{n\text{ раз}}=\frac{10^n-1}{9}\cdot a$. **44.** Первую строку и первый столбец запишем так: $0+1, 0+2, \ldots, 0+n, 0-n, n+n, 2n+n, \ldots, (n-1)n+n$. В результате каждое число таблицы представлено в виде суммы двух чисел, причем в каждой строке первые слагаемые одинаковы. Среди выбранных чисел будет по одному слагаемому из каждого столбца и каждой строки, поэтому сумма первых слагаемых выбранных чисел равна $0+n+2n+\cdots+(n-1)n=\frac{n^2(n-1)}{2}$, а сумма вторых слагаемых: $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. В итоге получается: $\frac{n(n^2+1)}{2}$. **45.** Если сумму номеров сторон каждого из треугольников $OA_{k-1}A_k$ обозначить через S, то сумма номеров сторон всех n треугольников равна $S-n$. Эта же сумма равна $(1+2+\cdots+n)\cdot 3=\frac{3n(n+1)}{2}$, так как номера сторон считаются по два раза (в каждом из смежных треугольников). Получаем: $S=\frac{3(n+1)}{2}$. Здесь n — нечётное, так как S — целое число. При $n=9$ имеем $S=15$. При $n=10$ указанная нумерация невозможна. Осуществите требуемую нумерацию для $n=9$. **48.** Если $a=2^\kappa\cdot A-1$, $b=2^l\cdot B+1$, A и B — нечётные, то $k<n$ и $l<n$. $2^n-1=2^{\kappa+l}\cdot AB+2^\kappa\cdot A-2^l\cdot B-1$. Отсюда, например, при $l=k+m$ имеем: $2^{n-\kappa}+2^m\cdot B=2^{\kappa+m}\cdot AB=A$. Здесь в левой части при $m>0$ чётное число, а в правой — нечётное. Равенство невозможно. Аналогично при $k=l+m$, $m>0$. **49.** Если $8n+1=x^2$, $24n+1=y^2$, то

$8n+3=4x^2-y^2=(2x+y)(2x-y)$. **50**. Если $p=3$, то $8p^2+1=73$ и $8p^2-p+2=71$ — простые числа. Как простое число, p не должно быть кратно 3, поэтому положим: $p=3k\pm 1$. Но при этом число $8p^2+1$ всегда оказывается кратным 3, т. е. составным. **51**. Показать, что N делится на 13. **52**. $p=30n\pm\alpha$ при $\alpha=1; 7; 11; 13$. $p^2=30A+\alpha^2$. Остатки от деления p^2 на 30 совпадают с остатками от деления α^2 на 30.

53. $a^2-\alpha^2=4b$. $a+\alpha=2A$, $a-\alpha=2B$; $a=A+B$, $b=AB$. $a^3-3ab=(A+B)^3-3(A+B)AB=A^3+B^3$. Доказано, что $x^3+y^3=z^3$ невозможно. **54.** Если HOD и HOK чисел a и b обозначить через d и m, то: $a=A\cdot d$, $b=B\cdot d$; числа A и B взаимно просты. Число $AB\cdot d$ делится и на a и на b В то же время это наименьшее из общих кратных a и b. Поэтому имеем: $md=Ad\cdot Bd=a\cdot b$. **55**. 15 и 72. **56**. $N_1=\frac{3a(3a+1)}{2}$, $N_2=\frac{(4a+1)\cdot(4a+2)}{2}$ и $N_1'=\frac{(3a+2)(3a+3)}{2}$, $N_2'=(2a+1)\cdot(4a+3)$; $a=1, 2, 3, \cdots$ **57** $C_p^k=p\cdot\frac{(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ — целое число, но по условию $k\leqslant p-1$ и p не делится ни на 2, ни на 3, $\cdots$, ни на k. Поэтому число $C_p^k:p$ — целое. **58**. Если $10^{22}<N<10^{23}$, то $1{,}2940<\frac{1}{17}\lg N<1{,}3530$. Отсюда $19{,}68<\sqrt[17]{N}<22{,}54$. **60**. Суммы делителей чисел a и b равны: $(2^{n+1}-1)(p+1)(q+1)$ и $(2^{n+1}-1)(r+1)$.
63. Перемножить равенства:

$$N=k_1\cdot p+r_1,\qquad 0<r_1<p;$$
$$2N=k_2\cdot p+r_2,\qquad 0<r_2<p;$$
$$3N=k_3\cdot p+r_3,\qquad 0<r_3<p;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(p-1)N=k_{p-1}\cdot p+r_{p-1},\ 0<r_{p-1}<p$$

и учесть, что $r_1\cdot r_2\cdots r_{p-1}=1\cdot 2\cdots(p-1)$. Покажите, что все остатки $r_1, r_2, \cdots, r_{p-1}$ должны быть различны. **65**. 1) $(2n+1)^2-1=4n(n+1)$ $n(n+1)$ всегда чётно. **2**) $(6n\pm 1)^2-1=12n(3n\pm 1)$, здесь одно из чисел n или $3n\pm 1$ обязательно кратно 2. **66**. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$. Воспользоваться разложением данных чисел в комплексной области:
$(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)=[(ac-bd)+i(ad+bc)]\cdot[(ac-bd)-i(ad+bc)]$

Глава II.

§ 3.

1. $\frac{x^{2^{n+1}}-a^{2^{n+1}}}{x-a}$. **2.** $\frac{x^{2^{n+1}}+x^{2^n}\cdot a^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{x^2+xa+a^2}$.

3. 0. **4**. $a+b+c$. **5**. $\frac{5+\sqrt{5}}{a}$; $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$. **6**. 1.

7. a^{m+1}. 8. 9. 9. $\frac{1}{a^3b^3}$ 1. 0. 3. $(x^2+y^2+z^2)$. 11. $(a+b)(b-c)(c+a)$

12. 1. 13. $\frac{1}{xyz}$. 14. 0. 15. 0. 16. $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$. 17. $(b-a)(a-c)(c-b)$.

18. Применить тождество: $x^3+y^3+z^3+u^3=3(x+y)(zu-xy)$ при $x+y+z+u=0$; $24abc$. 19. $4(a^2+b^2+c^2+d^2)$. 20. Обозначить: $x^2:(1+x^2)=z^2$; $(\sqrt{2}+1)^2$. 21. Обозначить через x и взять действительный корень уравнения: $x^3=14-3x$; $x=2$. Или учесть, что $5\sqrt{2}+7=$ $=(\sqrt{2}+1)^3$; $5\sqrt{2}-7=(\sqrt{2}-1)^3$. 22 Обозначить: $B=a\sqrt[3]{9}-b\sqrt[3]{6}$ и из условия: $B^3=9a^3-6b^3+9ab^2\cdot\sqrt[3]{12}-9a^2b\cdot\sqrt[3]{18}$ методом неопределённых коэффициентов найти: $a=1$ и $b=1$; или преобразовать: $B=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6})^3}$. 23. Обозначить: $B=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$ и из условия: $B^2=(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})^2$ методом неопределёниых коэффициентов найти: $a=1$, $b=1$, $c=\frac{1}{2}$. 24. $B=1$. Решается аналогично № 21.

25. $[(a^3-1)+1]^{3330}\cdot a+[(a^3-1)+1]^{112}\cdot a^2+1$, или учесть, что корень выражения a^2+a+1 удовлетворяет равенству $a^3=1$ и преобразовать B так: $B=(a^3)^{3330}\cdot a+(a^3)^{112}\cdot a^2+1=a^2+a+1$, т. е. корни трёхчлена a^2+a+1 являются корнями уравнения $B=0$. Следовательно, B делится на a^2+a+1. 26. $B=[(a^2+a+1)+a]^n\cdot(a+1)+a^{n+2}$. 27. Обозначить: $a^m-1=b$. $B=(b+1)^{a+1}-ab-b-1=b^2\cdot A+(a+1)b+1-ab-b-1$. 28. Для $n=2$ утверждение очевидно. При $n\geqslant 3$: $B=[(n-1)+1]^{n-1}-1=$ $=(n-1)^2\cdot A+(n-1)(n-1)+1-1$. 29. Обозначить: $x-1=y$. $B=(y+1)^{n+2}-(n+2)(y+1)+n+1$. 30. Аналогично № 29. 32. Обозначить: $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$, найти x и y. 33. Обозначить: $\sqrt{a\pm bi}=\sqrt{x}\pm i\sqrt{y}$ и найти x и y. 34. Из условия следует, что либо $a+b=0$, либо $b+c=0$, либо $c+a=0$. Ввиду симметричности данного и доказываемого равенств достаточно, например, считать $c=-a$. 35. По условию: $\frac{a}{b-c}=\frac{(b-c)(b^2-c^2-ab+ac)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$. Отсюда $\frac{a}{(b-c)^2}=$ $=\frac{b^2-c^2-ab+ac}{(b-c)(c-a)(a-b)}$, $\frac{b}{(c-a)^2}=\ldots$, $\frac{c}{(a-b)^2}=\ldots$ и т. д. 36. Обозначить все отношения через κ и применить теорему о ряде равных отношений. 37. Обозначить все отношения через κ. 38. Случай: $n=6\kappa-1$. 1 способ. По формуле бинома Ньютона имеем: $B=(x+y)[(x^2+xy+y^2)+$ $+xy]^{3\kappa-1}-x^{6\kappa-1}-y^{6\kappa-1}-(x^2+xy+y^2)\cdot A+y^{3\kappa-1}\cdot(x^{3\kappa}-y^{3\kappa})-$ $-x^{3\kappa-1}\cdot(x^{3\kappa}-y^{3\kappa})$. Здесь $x^{3\kappa}-y^{3\kappa}$ делится на x^3-y^3, следовательно, и на x^2+xy+y^2. 2 способ. Покажем, что корни трёхчлена y^2+xy+x^2 являются корнями выражения $B:y=\frac{x}{2}\varepsilon$, где $\varepsilon=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^3=1$.

$B = x^{6k+1} \cdot [(1+\varepsilon)^{6k+1} - 1 - \varepsilon^{6k+1}] = 0$, так как выражение в квадратных скобках равно нулю. **3 способ.** Применим метод математической индукции. 1) $k = 1$. $(x+y)^5 - x^5 - y^5$ делится на $x^2 + xy + y^2$ (см. дальше № 83) 2) Допустим $(x+y)^{6m-1} - x^{6m-1} - y^{6m-1}$ делится на $x^2 + xy + y^2$ 3) Рассмотрим: $(x+y)^{6m+5} - x^{6m+5} - y^{6m+5} - (x+y)^6 (x+y)^{6m-1} - (x+y)^6 (x^{6m-1} + y^{6m-1}) + (x+y)^6 (x^{6m-1} + y^{6m-1}) - x^{6m+5} - y^{6m+5} - (x+y)^6 [(x+y)^{6m-1} - x^{6m-1} - y^{6m-1}] + [(x^2 + xy + y^2) + xy]^3 \cdot (x^{6m-1} + y^{6m-1}) - x^{6m+5} - y^{6m+5}$ и т. д. Аналогично доказывается теорема для второго случая **39.** Достаточно показать, что $(a + bm + cm^2)(a + bm^2 + cm) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ при $m^3 = 1$) $m = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ Разложение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ см. в п. 2, § 1. **44** Пусть $M = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$. Тогда для упомянутых остатков имеем $a + b + c + d = 1$, $8a + 4b + 2c + d = 2$ (см. § 4, главы II). Находим: $M = ax^3 + bx^2 - (7a + 3b - 1)x + 6a + 2b$, где a и b — произвольные постоянные действительные числа. Остаток при делении этого многочлена на $(x-1)(x-2)$ равен x **45** Применить метод неопределённых коэффициентов к равенству: $M = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + mx + n)$ $a = 6$, $b = 25$, $m = 2$; $n = 5$. **46.** Рассмотреть равенства: 1) $M = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x + \kappa)$; $a = 6$, $b = 8$, $c = -3$, $\kappa = 3$. 2) $M = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + c)$ $a = c - 3$, $b = 2c - 2$, c — произвольное вещественное число **47** $M = (x^2 - 2x + 1)(ax^2 + mx + n)$ $a = 3$, $b = -4$, $m = 2$, $n = 1$ **48** $M = (x^2 + mx + n)^2$; $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{7}{8}$, $a = \frac{7}{8}$, $b = \frac{49}{64}$. **49** Пользуясь схемой Горнера, находим 1) если M делится нацело на $x + 1$, то $b = 2a + 4$, 2) если частное M_1 делится нацело на $x + 1$, то опять $b = 2a + 4$; 3) если второе частное M_2 делится нацело на $x + 1$, то $3b = 4a + 22$. Это с уравнением $b = 2a + 4$ дает: $a = 5$, $b = 14$; 4) Частное M_3 делится нацело на $x + 1$. $2a + b - 24 = 0$, 5) Частное M_4 уже не делится нацело на $x + 1$: $-3a + 16 = -3 \cdot 5 + 16 \neq 0$. Многочлен M делится на $(x+1)^4$, но не делится на $(x+1)^5$. **50** 1) $M = (x^2 + mx + 2)^2$ $a = -4$, $b = 8$, $= 8$, $m = 2$, и $a = -8$, $b = 20$, $c = 16$, $m = 4$. 2) $M = (x^2 + mx - 2)^2$ $a = 0$, $b = -4$, $c = 0$, $m = 0$ и $a = -4$, $b = 0$, $c = 8$, $m = -2$ **51.** Воспользоваться разложением: $B = (a+i)(b+i)(c+i)(a-i)(b-i)(c-i)$ $B = (abc - a - b - c)^2 + (ab + bc + ca - 1)^2$ **52** $B = (a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 - (b-2c)^2$ **53** $B = (a^2 + ab + b^2)^2 + a^2b^2 + a^2(a+b)^2 + b^2(a+b)^2$ — тождество Е. Баризена **54.** $B = (a-b)^2 - (a-b)(a-c) + (a-c)^2$. **55** $(4xy + x + y)^2 - (xy + x - y)^2$ **56.** Здесь и в задачах № 57 и № 58 применить подстановки: $x = a + b$, $y = a - b$ и метод неопределённых коэффициентов 1) $t^2 = \left(\frac{2x-y}{2}\right)^2$, $v^2 = \frac{y^2}{4}$; 2) $t^2 = \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2$, $v^2 = \frac{y^2}{4}$; 3) $t = \frac{x^2+y^2}{2}$, $v = \frac{(x+y)^2}{2}$; 4) $t = \frac{x^2+y^2}{2}$, $v = \frac{(x-y)^2}{2}$. **57.** 1) $t = a^3 + 7ab^2$, $v = b^3 - a^2b$; 2) $t = b^3 + 7a^2b$,

$v = a^3 - ab^2$; 3) $t = a^5 - 22a^3b^2 + 11ab^4$, $v = b^5 + 2b^3a^2 - 3ba^4$, 4) $t = b^5 - 22a^2b^3 - 11a^4b$, $v = a^5 + 2a^3b^2 - 3ab^4$ Если в п 1) поменять местами a и b, то получится результат п. 2) То же самое имеет место относительно результатов п. 3) и п 4) Переход к x и y осуществляется согласно равенствам, $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$ **58** 1) $t = 5a^6 + 15a^4b^2 + 11a^2b^4 + b^6$, $v = 18a^6 + 52a^4b^2 + 26a^2b^4$. 2) получается перестановкой a и b в результате п. 1) Заменив a и b их выражениями через x и y, получим выражения для t и v в виде многочленов относительно x и y. **59** $a^3 - 3ab^2 + 2c^3 = 0$ **61** Имеем. $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2$ — тождество Лагранжа Число разностей вида $a_kb_l - a_lb_k$, $(l \neq k)$ равно C_n^2. Всего в правой части тождества Лагранжа имеется $1 + C_n^2 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ квадратов. **62.** $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac)^2 + (2ad)^2 + (2bc)^2 + (2bd)^2$ **64.** Первому числу n-ой группы предшествует $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ нечетных чисел, поэтому эта группа чисел начинается с числа $2\left[\frac{(n-1)n}{2} + 1\right] - 1 = n^2 - n + 1$ и завершается числом $n^2 - n + 1 + 2(n-1) = n^2 + n - 1$. **65.** Дробь равна каждому из данных отношений **66.** 1) Доказывается, как № 21 2) Используйте формулы задачи № 32

$$\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}$$

3) Доказывается аналогично 1) **67.** Применить формулы задачи № 33 Вообще $\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ (см ниже). **68.** $\sqrt[3]{2 + 11i} - \sqrt[3]{(2+i)^3}$ Принимая $\sqrt[3]{(2-i)^3}$ за $2 + i$, $\sqrt[3]{(2-i)^3}$ за $2 - i$, Бомбелли получил доказываемое равенство. Другие два значения выражения $\sqrt[3]{2 + 11i}$ $\sqrt[3]{2 - 11i}$ тоже вещественны. Они равны $-2 + \sqrt{3}$ и $-2 - \sqrt{3}$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет ровно n значений. Здесь следует взять:

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = (2 + i)\varepsilon \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{2 - 11i} = (2 - i)\varepsilon,$$

где $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$, ($\varepsilon_0 = 1$ — учтено!), $\varepsilon_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -1$. Дальше задача решается так.

$$\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = (2 + i)\varepsilon_1 + (2 - i)\varepsilon_2 = -2 - \sqrt{3};$$

$$\sqrt[3]{2 + 11i} \cdot \sqrt[3]{2 - 11i} = (2 + i)\varepsilon_2 + (2 - i)\varepsilon_1 = -2 + \sqrt{3}$$

Более короткое решение. Обозначаем левую часть доказываемого равенства через x и решаем уравнение: $x^3 - 15x - 4 = 0$ или $(x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$. Находим: $x_1 = 4$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$. **69.** $2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{10}$. **71.** $B = 16^n - 9^n - 7 = (16^n - 9^n) - 7 = 16^n - (9^n - 1) - 8 = (16^n - 1) - 9^n - 6$ делится на $7 \cdot 8 \cdot 3 = 168$. **72.** $2a - 3b + 4c$. **73.** Решение автора основано на задаче Никомаха (см. № 64):

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 1 + 3 \ldots + (n^2 - n + 1) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

S_3 можно найти с помощью тождества:

$$4\kappa^3 = \kappa^4 - (\kappa - 1)^4 + 6\kappa^2 - 4\kappa + 1,$$

придав κ значения от 1 до n и сложив полученные числовые равенства. S_3 выразится через суммы:

$$S_1 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ и } S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

74. Проще всего воспользоваться методом математической индукции. Сам Ферма́ даёт следующее решение: $S_4 = 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$. Отсюда $5S_4 = S_2 \cdot (3n^2 + 3n - 1)$. С другой стороны: $(4n+2) \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - S_2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} \cdot 3n(n+1) - S_2 = S_2 \cdot (3n^2 + 3n - 1)$. Сумму S_4 можно вычислить, пользуясь тождеством: $5\kappa^4 = \kappa^5 - (\kappa - 1)^5 + 10\kappa^3 - 10\kappa^2 + 5\kappa - 1$, придав κ значения от 1 до n и сложив полученные равенства. В результате получится рекуррентная формула: $S_4 = \frac{n^5 - n}{5} + 2S_3 - 2S_2 + S_1$ Здесь S_4 выражается непосредственно через предыдущие суммы, поэтому формула называется рекуррентной. Если S_3, S_2 и S_1 заменить их выражевиями, то получится формула, выражающая S_4 непосредственно через число членов n, которой воспользовался Ферма́. **75.** $B = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1) + 20(n-1)n(n+1)$. Здесь первое слагаемое, как произведение пяти последовательных целых чисел, делится на $5! = 120$; во втором слагаемом $(n-1)n(n+1)$, как произведение трех последовательных целых чисел, делится на $3! = 6$. **76.** $3(a-b)(b-c)(c-a)$. **77.** $(a-b)(b-c)(c-a)$. **78.** $(c-b)(b-a)(a-c)$. **79.** $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$. **80.** $(a+b+c)(ab+bc+ca)$. **81.** $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$. **82.** $2(a^2 + ab + b^2)^2$. **83.** $-5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$. **84.** $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$. **85.** $(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^2 - b^2 + 1) = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - b^2 + 1)$ **86.** $3(a+b)(b+c)(c+a)$. **87.** $5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$. **88.** $4xy(a+b)(a-b)$ **89.** $a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 - 4a^3b + 4ab^3 = (a^2 - 2ab - b^2)^2 = [a - b(\sqrt{2}+1)]^2 \cdot [a - b(\sqrt{2}-1)]^2$. **90.** Обозна-

чить: $1 - c - a$ и свести к № 89 **91.** $-p^3 + p(ab + bc + ca) - abc - (p - a)(p - b)(p - c)$. **92.** $(a^2 - 2a + 2)(a + 1 - \sqrt{3})(a + 1 + \sqrt{3})$. **93.** $(4a - 3\sqrt{a} + 4)^2$. **94.** $(a - 1)(3a - \sqrt{2a} + 3)(3a + \sqrt{2a} + 3)$. **95.** $(x - a - 1)(x^2 + ax + a^2 + a + 1)$. **96.** $(x - 5)^4$ **97.** $(x + 1)(x + 3)(x + 5)$.

98. $\frac{1}{2}(x - 1)(2x - 1)(x + 2)(x + 3)$. **99.** $(x + 2)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2)^2$.

100. Обозначим: $a + b + c = 2p$. B делится на $a - b$, $b - c$ и $c - a$. С помощью метода неопределённых коэффициентов находим: $B = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)^2$. **101.** $3B - (a + b + c)^3 + 5(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 3(a - b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca)$. **102.** $(a + b + c)^3$.

103. $(a + b + c)^2 \cdot (a + b - c)$. **104.** $(a+b+c)^2 \cdot (a - b - c)$. **105.** $(a^2 + 3a + 1)^2$.

106. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c)$, где $2p = a + b + c$

107. $B = (n^2 - 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$.

§ 8.

1. Подъёмы — 16 *км*, спуски — 10 *км* **2.** 68, 5 *км*. **3.** 37 *км*/час; 3 *км*/час. **4.** 8 *км*/час, 7 *км*/час. **5.** $\frac{340 \cdot d}{r_2 - r_1}$. **6.** 50 *Г*, 150 *Г*, 200 *Г*. **7.** Приблизительно 14 *м* в минуту. **8.** 33 *м*, 1,5 *м*, 50 рублей; 33 *м*, 1,8 *м*, 60 рублей; 44 *м*, 1, 8 *м*, 80 рублей. **9.** 3 и 7. **10.** 40 часов. **11.** Число шаров в треугольнике: $\frac{(x + 2)(x + 3)}{2}$ равно x^2 - числу шаров в квадрате. **12.** На 30 сек. **13.** Пусть $N = \overline{abcd}$, $N_1 = \overline{dcba}$. Тогда из условия: $N - N_1 = 1089$ имеем: $121 \cdot (a - d) - 10(a - d + c - b) = 121$. Отсюда $a - d = b - c$; $121(a - d) = 121$, $a - d = 1$. Далее используем первые условия Искомое число $N = 3762$ **14.** 15 часов

§ 9.

1. $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$. **2.** $\frac{b}{d}$ и $-\frac{c}{a}$. **3.** Дискриминант равен: $-16s^2 < 0$.

4. По теореме Вьета имеем: $m + n = -a$, $mn = 1$; $k + l = -b$, $kl = 1$. Отсюда $(m - k)(n - k) = k^2 + ak + 1$; $(m + l)(n + l) = l^2 - al + 1$ и т. д. **5.** Дискриминант уравнения $D = a^2 + 12a - (a + 6)^2 = -6^2$ должен быть точным квадратом. Поэтому примем: $a + 6 = \pm(m^2 + n^2)k$, $6 = \pm 2mnk$ (См. числа Пифагора—решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$), $D = (m^2 - n^2)^2 k^2$. Отсюда $a = \pm(m - n)^2 \cdot k$, где m и n — взаимно просты, $mnk = \pm 3$. При этом $x = \pm m(m - n)k$ или $x = n(m - n)k$ — целые. $a = 0$; 4; -12, -16. **6.** Дискриминант уравнения $x^2 + 3x + 5 = 121k$ ни при каком целом k не является полным квадратом: $D = 11(44k - 1)$. D делится на 11, но не делится на 11^2. **7.** При $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$ дискриминант уравнения $D = a^2 - 4b = 4[m(m + 1) - 2n] - 3 = 8A + 5$, так как $m(m + 1)$ — чётное. Но квадрат нечётного числа должен быть вида $8k + 1$. Корни данного уравнения нерациональны. **8. Достаточность условия.** Если $n = 3k \pm 1$, то $y = -1 \pm i\sqrt{3}$, $x - 2^{n-1}(-1 + i\sqrt{3}) = 2^{n-1} \cdot y$.

$$1)\ y^n = y^{3k+1} = (y^3)^k \cdot y = 8^k \cdot y = (2^3)^k \cdot y = 2^{n-1} \cdot y = x.$$

$$2)\ y^n = y^{3k-1} = (y^3)^{k-1} \cdot y^2 = 8^{k-1} \cdot y^2 = 2^{3k-3} \cdot 2(-1 \mp i\sqrt{3}) =$$

$$= 2^{n-1} \cdot y = x.$$

Необходимость условия. Если $x = y^n$, то $y^{n-1} = 2^{n-1}$, но $y^3 = 2^3$, следовательно, $n - 1 = 3k$.

9. Дискриминант уравнения $D = -(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 < 0$, если a, b и c не все равны между собой. Уравнение $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + n = 0$ можно представить в виде $(a_1x + 1)^2 + (a_2x + 1)^2 + \cdots + (a_nx + 1)^2 = 0$. При действительном x равенство возможно только тогда, когда все числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ равны друг другу. **10.** Воспользоваться теоремой Вьета. 1) $by^2 + a(b+1)y + a^2 + (b-1)^2 = 0$. 2) $(a + b + 1)y^2 - 2(b-1)y - a + b + 1 = 0$. **11.** Если возвратное уравнение имеет корень a, то оно имеет также корень $\frac{1}{a}$. Квадратное уравнение, корни которого обратны корням данного квадратного уравнения, получится, если в нём x заменить на $\frac{1}{x}$. Поэтому искомое возвратное уравнение будет таково:

$(2x^2 - 7x + 3)(3x^2 - 7x + 2) = 0$ или $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

12. Общий корень находим из уравнения:

$$(2x^2 - ax + 3) \cdot 2 - [4x^2 - (a-3)x + 3] = 0. \quad x = \frac{3}{12 - 2a}.$$

Подставив это значение x в одно из данных уравнений, найдём $a = 5$. **13.** Решается аналогично № 12. Корни первого уравнения: $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$, корни второго: $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}(1 \pm i\sqrt{15})$. **14.** $x^3 = -3(x+3)$. Отсюда $x^9 = -81(3x^2 + 8x + 6)$. Теперь придать x значения x_1, x_2, x_3 и полученные равенства сложить: $x_1^9 + x_2^9 + x_3^9 = 0$. **15.** Решается аналогично № 14: $x^{16} = 21x^2 - 28x + 16$, $x_1^{16} + x_2^{16} + x_3^{16} = 0$. **16.** $y^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$. **17.** $y^3 - 2y^2 + y + 1 = 0$. **18.** Заменить b выражением через a, положить $3x = y$; получится уравнение: $(y + a - 3)[y^2 - (a-3)y + a^2 + 3a + 9] = 0$ $y_1 = 3 - a$, $y_{2,3} = \frac{1}{2}[a - 3 \pm i(a+3)\sqrt{3}]$. **19.** По условию $a = c + d$, $d = a - c$; $e = c + b$, $b = e - c$. Уравнение примет вид: $ax^4 + ex^3 - cx^3 + cx^2 + ax - cx + e = 0$ или после группировки: $ax(x^3 + 1) + e(x^3 + 1) - cx(x^2 - x + 1) = 0$. **20.** Воспользоваться § 4. **21.** Доказывается методом неопределённых коэффициентов. **22.** Если κ — двукратный корень данного уравнения, то $x^5 - 5x + a = (x^2 - 2\kappa x + \kappa^2)(x^3 + 2\kappa x^2 + bx + c)$. Отсюда находим: $b = 3k^2$, $n = 4k^3$, $a = nk^2 = 5k - k^5$; $k = \pm 1$, $a = \pm 4$ (знаки берутся соответственные). **23.** Так как $x \neq a$, $x \neq b$, $x \neq c$, умножим обе части на $(x-a)(x-b)(x-c)$. В уравнении $3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$

дискриминант $D = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ (нулевое значение соответствует равным числам, но это исключается из-за сказанного вначале).

24. $x_{1-4} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 + 4k}\right)$, где $k = \frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{m^2 - 4mn})$.

25. $x_{1,2} = \pm(a+b)$, $x_{3,4} = \pm(a-b)$. **26.** $x_{1,2} = a \pm bi$, $x_{3,4} = -a \mp bi$.

27. $x_1 = \sqrt{a+1}$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}(-\sqrt{a+1} \pm \sqrt{a+5})$. **28.** $x_1 = \frac{1}{2}$,

$x_{2,3} - \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{35})$. **29.** $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2$. **30.** $x_1 = -a - b$.

$x_{2,3} = \frac{1}{2}[a + b \pm (a-b) i\sqrt{3}]$. **31.** $x_1 = a + 1$, $x_{2,3} =$

$= \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{-3a^2 - 4a - 4}\right)$. **32.** $x_1 = a$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 + 8}\right)$.

33. $x_1 = -3 - 2\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{100}$, $x_2 = -3 - 2\varepsilon_1 \sqrt[3]{10} - \varepsilon_2 \sqrt[3]{100}$,

$x_3 = -3 - 2\varepsilon_2 \sqrt[3]{10} - \varepsilon_1 \sqrt[3]{100}$, где $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$,

$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$. **34.** $x_1 = -a$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 8}\right)$.

35. $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_{2,3} = -\sqrt{3} \pm i\sqrt{15}$. **36.** $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{2,3} =$

$= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{a} \pm \sqrt{a + 4\sqrt{a}}\right)$. **37.** $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{2,3} = 1 \pm i$.

38. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{2}$. **39.** Разлагаем левую часть на множители: $(x^2 - x + m)(x^2 - x + n)$. Методом неопределённых коэффициентов находим: $m = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a})$ и $n = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 + 4a})$. Потом решаем уравнения: $x^2 - x + m = 0$ и $x^2 - x + n = 0$. **40.** $x_1 = 1$,

$x_2 = -2$, $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{27})$. **41.** Обозначить: $x^2 + 2x = y$.

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{5}$. **42.** $(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3) = 0$.

43. Прибавить к обеим частям $36x^2 + 1$, $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{7}$,

$x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{26}$. **44.** $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)[x^2 - x(\sqrt{2} - 1) + 2] = 0$.

45. $\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. **46.** $(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 5x + 6) = 0$. **47.** Обозначить: $2x^2 + 3x = y$. **48.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm i)$. **49.** Прибавить к обеим частям $16x^2 + 1$. **50.** $x^2 - 7x$ обозначить через y.

51. $(x^2 - 2)(x^2 - 4x + 7) = 0$. **52.** Обозначить: $x - \frac{a+b}{2} = y$. **53.** Обозначить: $x^2 - 5x = y$. **54.** $(x^2 + ax + a^2)^2 = b^4$. **55.** Прибавить к обеим частям $4(x-2)^2$. **56.** Обозначить: $x^2 - 3x = y$. **57.** $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1 \pm i$.

$x_{4,5} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. **58.** $(x-c)(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0$ **59.** Обозначить: $x^2+x=y$. **60.** Обозначить: $x^3-3x=y$. **61.** $(x^2-3x+72)(x^4-3x^3-2x^2-3x+1)=0$. **62.** Обозначить: $x^2+3x=y$.

63. $\left(x^3-bx+\frac{a}{2}\right)\left(x^3-bx+\frac{a}{2}\right)=0$. Обозначить: $x=u+v$.

$u^3+v^3=-\frac{a}{2}$, $uv=\pm\frac{b}{3}$. **64.** ± 1, $\pm i\sqrt{3}$. **65.** $(3x^2+a)^2(3x^2+4a)=0$.

66. Обозначить: $2x=y$. $(y-1)^2(y^2+y+1)(y^2+y+7)=0$. **67.** Обозначить: $x-5=y$. **68.** Представить в таком виде: $[(x+1)^2]^3+[(x-1)^2]^3=a[(x^2)^3+1]$. **69.** $(x^2-a^2)(x^4+16a^2x^2+31a^4)=0$.

70. $(4x^4-3a^4)^2=b^8-9a^8$. **71.** $x(x+2a)(x^2+2ax+2a^2)=0$.

72. 0; $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ при $a+b\neq 0$. **73.** $-a$; $a-1$. **74.** $a+1$; $\frac{a+1}{a}$ при $a\neq 0$.

75. Отнять от обеих частей $2x\cdot\frac{x}{x+1}$ и обозначить $\frac{x^2}{x+1}$ через y. **76.** Прибавить к обеим частям $\frac{2x^2}{x^2-1}$ и $\frac{x^2}{x^2-1}$ обозначить через y. **77.** Если $a+b\neq 0$, то $x_1=-a$, $x_2=-b$. Если $a+b=0$, то x — любое число, отличное от нуля.

78. $297x^2-1782x+776=0$. **79.** Сгруппировать члены, равноудалённые от начала и конца, потом обозначить x^2+7x через y. **80.** 2, 8, $5+\sqrt{31}$; $5-\sqrt{31}$. **81.** $(x^2+a^2)(x-a)^2[(x+a)(x^3+a^3)-a^4]=0$. **82.** Прибавить к обеим частям $-2\cdot\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$. **83.** $\sqrt{x-1}=u$; $u=2$. **84.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. **85.** $x=0$, если $a\neq 0$ и x — любое вещественное число, если $a=0$. **86.** Получаемое $x=-\frac{4a}{3}$ должно удовлетворять условиям: 1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}>0$, отсюда $a>0$; 2) $\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{x^4}}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ax}>0$, но при $a>0$ это условие нарушается В области действительных чисел нет решения. **87.** $x=-a$, если $a\geqslant 0$; если $a<0$, то нет решения. **88.** x — любое положительное число, если $a=0$; если $a\neq 0$, то решения нет. **89.** Обозначить $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}$ через y $x=7$.

90. $150x$ обозначить через $(30y)^3$; $x=180$. **91.** $\frac{1}{2}(81\pm\sqrt{6881})$. **92.** Если $x=\pm a$, то получается решение: $x=a=0$; если $x\neq\pm a$, то обе части можно разделить на $\sqrt[3]{a^2-x^2}$ и обозначить $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$ через y. $x=\frac{63a}{65}$

93. Если $a=0$, то $x=0$. Из того, что $x>0$ и $a>\sqrt{a+x}$ имеем: $a>0$ $x<a(a-1)$. Отсюда заключаем, что $a>1$. $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4a-3})$.

94. $\sqrt[3]{x+1} - y \cdot (2y-1)^4 - 0$. **95.** $\sqrt{x-2} = u$, $(u-1)(u^4 - 4u^3 - 4u^2 - 4u + 1) = 0$. **96.** $\left(\sqrt{x+1} - 1\right)^4 = 0$. **97.** $x - 2$. **98.** $\sqrt{x^2 - 9} = u$, $(u-2)^4 - 0$. **99.** $\sqrt{x^2 + 6x} = u$; $x \quad 2, -8$. **100.** $\sqrt{4-3x^2} - u$. **101.** $\sqrt[4]{97-x} = u$, $\sqrt[4]{x} - v$; $u + v = 5$, $u^4 + v^4 = 97$ x - 16; 81. **102.** Обозначить большие радикалы через $9 - z$ и $9 - z$, а кубические радикалы через t и v Получится уравнение $6z^5 + z^4 + 648z^3 + 324z^2 + 54z - 0$, имеющее единственный вещественный корень $z = 0$. **103.** $\sqrt[4]{1300-x} \quad u$, $\sqrt[4]{x+12} = v$ $u+v=8$, $u^4 + v^4 - 1312$ $x - 4$; 1284. **104.** Обозначить большие радикалы через $9 + z$ и $4 + z$, $(z > -4)$, а кубические радикалы через t и v. Уравнение $z^4 + 36z^3 + 324z^2 - 0$ даёт $z - 0$. **105.** $x = 1600$. **106.** $\sqrt{x^2 + x + 1} = u$, $x = 0, \quad 1$. **107.** $x > 0$ $\sqrt{x^2 + 8x + 7} + \sqrt{x^2 + 8x} = 7$. **1 способ.** Обе части умножить на сопряжённое выражение: $\sqrt{x^2 + 8x + 7} - \sqrt{x^2 + 8x} = \kappa$. **2 способ.** Обозначить $x^2 + 8x + 3{,}5$ через y **108.** $\sqrt{x-1} - u$, $u = 2$. **109.** $\frac{25}{16}$. **110.** $7, 6\frac{1}{3}$. **111.** $x^2 - 2x - u$ Из $x > -2$ следует, что $x \geqslant 5$. **112.** $\sqrt{x-1} = u$, $u = 0$. **113.** $138 + 5x = u^5$, $137 - 5x = v^5$. $u + v = 5$, $u^5 + v^5 = 275$. Применить тождество: $(u+v)^5 - u^5 - v^5 = 5uv(u+v)(u^2 + uv + v^2)$. $x = 21; -21{,}2$. **114.** Решения нет. **115.** Очевидное решение. $x = 0$. Отделив это решение, обе части разделить на $\sqrt[mn]{x^{m+n}}$. **116.** Уравнению удовлетворяют все числа, кроме чисел, заключённых между -1 и 0: $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 0$

§ 10

1. $\frac{(b-1)(c-1)}{(b-a)(c-a)}; \frac{(c-1)(a-1)}{(c-b)(a-b)}; \frac{(a-1)(b-1)}{(a-c)(b-c)}$

2. Если числа a, b и c различны, то $x = abc$, $y = ab + bc + ca$, $z = a+b+c$

3. От каждого уравнения почленно отнять предыдущее: $2x_2 = x_1 - 1$, $2x_3 = x_2 - 1$, $\cdots$, $2x_n = x_{n-1} - 1$. Сложить эти равенства с первым уравнением системы: $x_n = -(n+1)$. Далее: $x_{n-1} = -(2n+1)$, $x_{n-2} = -(2^2 n + 1)$, $\cdots$, $x_2 = -(2^{n-2} \cdot n + 1)$, $x_1 = -(2^{n-1} \cdot n + 1)$. **4.** Сложить все уравненения: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$; полученное равенство прибавить ко второму уравнению и от суммы отнять первое уравнение: $x_1 = \frac{2}{n}$. Аналогично получаются $x_2 = \frac{2}{n}$, $x_3 = \frac{2}{n}$, $\cdots$, $x_{n-1} = \frac{2}{n}$, $x_n = \frac{2}{n} - 1$.

5. Обозначить отношения через t. $(0, 0, 0)$; $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$;

$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$. **6.** $(0, 0, 0)$; $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6}, \sqrt{2})$; $(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{6}, -\sqrt{2})$. **7.** Очевидное решение: $(0, 0, 0)$. При $b < 0$ других решений нет, а при $b = a^2 - 2 > 0$ система неопределённа. **8.** $x + y = u$, $xy = v$. **9.** $x = uy$. **10.** $y = ux$. **11.** Учетверённое второе уравнение прибавить к первому и отнять от него: $x + y = 5\varepsilon$. $x - y = 3\varepsilon$; $(\varepsilon = \sqrt[4]{1})$. **12.** $x^2 - y^2 = u$, $xy = v$. **13.** $x^2 + x = u$, $3x + 5y = v$. **14.** $x + y = u$, $xy - 1 = v$; $u^2 + v^2 = 10$, $uv = 3$. **15.** Из первого уравнения сначала $y = x$, потом $y = -3$ подставить во второе. **16.** Сначала сложить и вычесть почленно. **17.** Перемножить: $x^3 = -y\ (xy - 1)$ и $y^3 = x(xy + 1)$. **18.** $x^2 + y^2 = 16 - 2xy$, $x^3 + y^3 = 64 - 12xy$; из второго уравнения системы найти xy. **19.** $x = uy$. **20.** Отнять почленно. **21.** $x^2 + 2y^2 = u$, $2xy = v$. **22.** Утроенное второе уравнение прибавить к первому. $x + y = \sqrt[3]{a^3 + 3b^3}$ взять с xy из второго уравнения. Можно применить подстановку: $y = ux$. **23.** Очевидное решение: $(0, 0, 0)$. Если $y = x$, то $x = \pm\sqrt{7}$; если $y = -x$, то $x = \pm\sqrt{19}$; если же $y \neq \pm x$, то $x^2 + xy + y^2 = 19$, $x^2 - xy + y^2 = 7$. Отсюда $x + y = \pm 5$, $x - y = \pm 1$. **24.** Утроенное второе уравнение отнять от первого. Можно воспользоваться подстановкой $y = ux$. **25.** $(7,4)$, $(-7,-4)$, $(4,7)$, $(-4,-7)$. **26.** Сначала находим xy. **27.** $x + y = u$, $xy = v$. **28.** Нулевое решение очевидно. При $y \neq \pm x$ сделать подстановку: $y = ux$. **29.** Решается, как № 28. **30.** Выразить xy через a. **31.** $x + y = u$, $xy = v$. **32.** $x + y = u$, $xy = v$. **33.** $(5, 3)$ и $\left(-\frac{7}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

34. Из пропорции $x : y = (a^3 - b^3) : (a^3 + b^3)$ получить $x - y = -2b^3$.

35. $(x - y)u = 1$, $(2x + 3y)v = 1$. **36.** $xyz = t$, $(x^3 + y^3 - z^3 + 3t) = k$; $\kappa x = a^2 - bc$, $ky = b^2 - ca$, $kz = ab - c^2$. $k^4 = k^3x^3 + k^3y^3 - k^3z^3 + 3tk^3 = A^3 + B^3 - C^3 + 3ABC$, где $A = a^2 - bc$, $B = b^2 - ca$, $C = ab - c^2$. **37.** От первого уравнения отнять второе: $(x - y)2z = a - b$; это равенство сложить с третьим уравнением: $x - y + z = \pm\sqrt{a - b + c}$. По аналогии можно написать еще: $x + y - z = \pm\sqrt{a + b - c}$ и $-x + y + z = \pm\sqrt{-a + b + c}$. **38.** Сложить все уравнения или обозначить: $y = ux$, $z = vx$. **39.** $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$, $(a, 0, 0)$. **40.** $xyz = t$, разделить уравнения соответственно на xy, yz, zx. От первого уравнения отнять второе и третье. $x = \frac{t+3}{t+30} \cdot z$, $y = \frac{t+3}{t+12} \cdot z$ подставить в первое уравнение. **41.** Выделив нулевое решение, все уравнения разделить соответственно на $axyz$, $bxyz$ и $cxyz$. **42.** На основании тождества задачи № 39 § 3 систему можно переписать так:

$$(x + y + c)(x + my + cm^2)(x + m^2y + cm) = 0,$$

$$(y + z + a)(y + mz + am^2)(y + m^2z + am) = 0,$$

$$(z + x + b)(z + mx + bm^2)(z + m^2x + bm) = 0.$$

Получается 27 систем однородных линейных уравнений. Первая из них даёт вещественные решения: $x = p - a$, $y = p - b$ и $z - p -$ c, где $2p = a+b+c$. **43.** Система переписывается так:

$$(x+1)^3 + (y+1)^3 = 2c + 2,$$

$$(y+1)^3 + (z+1)^3 = 2a + 2,$$

$$(z+1)^3 + (x+1)^3 = 2b + 2.$$

44. Разложить левые части на множители. **45.** От суммы первых двух уравнений отнять третье: $2xy = a^2 + b^2 - c^2$. Ввиду симметричности можно написать: $2yz = -a^2 + b^2 + c^2$ и $2zx = a^2 - b^2 + c^2$. **46.** Выделив нулевое решение, обозначить: $x + y = \frac{1}{t}$, $y + z = \frac{1}{u}$, $z + x = \frac{1}{v}$. **47.** $x + y = u$, $xy = v$; $(u \neq 0)$. Ввиду симметричиости системы, достаточно указать решение: $(a, ai, -ai)$. **48.** Очевидное решение: $(a, 0, 0)$ — едиистве́нное решение системы. **49.** Из обеих частей извлечь квадратный корень и обозначить: $x = m^2$, $y = n^2$, $z = k^2$. Тогда: $\pm am \pm bn \pm ck = 0$, потом последовательно заменить $\pm ck$, $\pm bn$, $\pm am$. В результате получатся системы линейных уравнений: $m \pm a = \pm(n \mp b)$, $k \pm c = \pm(m \mp a)$. Теперь выражения n и k через m подставить в одно из уравнений преобразованиой системы. **50.** Отделить очевидные решения: $(m, 0, 0)$, $(0, m, 0)$ и $(0, 0, m)$, где m — любое число. Предполагая x, y и z отличными от нуля, разделить почленно первое уравнеиие на $a^2x^2y^2z^2$, второе на $b^2x^2y^2z^2$, третье на $c^2x^2y^2z^2$. **51.** Разложить левые части уравнений на множители и ввести подстановку: $x + y + z = 2t$. **52.** Сложить почленно все уравнеиия. **53.** Раскрыть скобки и решить относительно: $x^2 - yz$, $y^2 - zx$ и $z^2 - xy$. В системе: $x^2 - yz = -a + b + c$, $y^2 - zx = a - b + c$, $z^2 - xy = a + b - c$ заменить z на $-z$. Тогда все решения получатся из решений системы № 36 путём замены z на $-z$, а чисел a, b и c соответствеино числами $-a + b + c$, $a - b + c$ и $a + b - c$. **54.** $xy = 7 + (x - y)z = 7 - z^2 = \frac{6}{z}$, $z^3 - 7z + 6 = 0$. **55.** Отделив нулевое решение, разделить почленно первые два уравиения на xyz, третье—на xz. **56.** Второе уравнение с учётом $z^2 = x^2 - y^2$ можно преобразовать в уравнение: $yz = \pm 12$, потом решить системы: $y - z = 1$, $yz = 12$, $y - z = 1$, $yz = -12$. **57.** Использовать разложеиие многочлена: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. **58.** $y = a - c$, $x + z = a + c$, $xz = \frac{(a^2 - c^2)b}{a + b - c}$. **59.** $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Обозначить эти отношения через t и получеиные выражеиия x, y и z подставить в третье уравиение. **60.** Умножить почленно все уравиения на $xyz = t$ и обозначить: $a + b + c = 2p$. **61.** Из первых двух уравнений исключить x и y: $z^2 + z - 1 = 0$; потом из первого и третьего уравнений получается система $x + y = z + 1$, $xy = z$. **62.** Обозначить: $x + y + z = 2u$. **63.** $x = -z - 2$, $u = \frac{4}{y}$ подставить в средние уравнеиия. Получится уравиение: $(y - 2)^2(y^2 + 3y + 4) = 0$. **64.** Обозначить: $x + u = v$, $y - z = t$, $x + z = m$, $x + y = n$, $y - u = \kappa$, $z + u = l$. **65.** Обозиачить: $xyzu = t$ и пере-

множить уравнения: $x^4 = t - a$, $y^4 = t - b$, $z^4 = t - c$, $u^4 = t - d$. **66.** Отделив нулевое решение, перемножить уравнения почленно и разделить обе части на $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$. **67.** Обозначить: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x$, сложить почленно все уравнения и найти x. Дальше решается аналогично № 4. **68.** $x = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, $y = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. **69.** Обозначить: $\sqrt{x-1} = u$, $\sqrt{y-1} = v$. **70.** Обозначить: $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$. **71.** Обозначить: $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$. **72.** Обозначить: $x = u^3$, $y = v^3$. **73.** Отделив решения: $(0, n, n)$, $(n, 0, n)$ и $(n, n, 0)$, где n — любое действительное число, разделить уравнения друг на друга. **74.** Из первого уравнения: $\sqrt{x^2 - y^2} = 4$. **75.** Обозначить: $\sqrt{x(x+y)+4} = t$; получится $t - 7$. Из первого уравнения: $y = \pm \frac{4}{5} x$ подставить в уравнение: $x^2 + xy = 45$. **76.** Первое уравнение возвести в квадрат и сложить с удвоенным вторым уравнением. **77.** Обозначить: $x = u^3$, $y = v^3$. **78.** Обозначить: $ax + by + c = t$ и решить систему уравнений: $(t - a_1)x - b_1 y = c_1$, $-a_2 x + (t - b_2) y = c_2$. Найденные для x и y выражения подставить в уравнение $ax + by + c = t$. Получится уравнение третьей степени относительно t. Каждому из трёх значений t будет соответствовать система уравнений относительно x и y. **81.** Обозначить: $x + y = u$, $\sqrt{xy} = v$. Из первого уравнения: $u^2 - a^2 - \frac{2a}{v}(v^2 + 1) + \frac{1}{v^2}(v^4 + 1) + 2$, из второго: $u^2 = b + 2 + \frac{v^4 + 1}{v^2}$.

Получается:

$$\frac{2(v^2+1)}{v} a = a^2 - b, \quad \frac{v^2+1}{v} = \frac{a^2-b}{2a}, \quad u = \pm \frac{a^2+b}{2a}.$$

§ 11.

1. 40 и 60. **2.** 6 и 2. **3.** 4, 3 и 5. **4.** $\frac{11}{4}$, $\frac{7}{5}$ и $\frac{17}{3}$. **5.** $\frac{112}{13}$; $\frac{27}{169}$. **6.** 41, 80 и 320. **7.** 15. **8.** $10\sqrt{13}$ *л*; расстояние от корней бóльшей пальмы до места встречи равно 20 локтям. **9.** $y = \frac{10}{x}$, $z = \frac{100}{x^3}$ и т. д. **10.** Надо решить уравнение: $2x^3 - 20x^2 + 27x + 10 = 0$. Сам автор не смог решить это уравнение. Впервые его решил арабский математик Абдул-Джуд, живший в XI в. Он нашёл: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}(8 + \sqrt{74})$ и $x_3 = \frac{1}{2}(8 - \sqrt{74})$. **11.** 4 и $-\frac{100}{7}$ **12.** Автор обозначает $\sqrt{x^2 - 3x}$ через y. **13.** Приводится к квадратному уравнению относительно $\sqrt{x}$. **14.** 40 и 170. **15.** 48 или 16. **16.** Решение автора задачи: Пусть число пчёл $2x^2$. Тогда $2x^2 = x + \frac{16}{9} x^2 + 2$. Ответ: 72. **17.** Решение автора: $x^3 - 12x - 6x^2 = 35$. Вычитает по 8: $(x-2)^3 = 27$, $x - 5$. **18.** Бхаскара даёт один корень: $x = 11$. Остальной

ные корни: $x_2 = -9$ и $x_{3,4} = -1 \pm 10i$ **19.** $(x^2 + x + 1)^2 = 81601$ и т. д. **20.** $3\frac{9}{17}$, $7\frac{13}{17}$ и $9\frac{3}{17}$. **23.** 1) 8; 1; -1. 2) 2, 3; **4**. 3) 2, 3, 4, -5. **24.** 1) 64 и 36 2) 9 и 6 3) 40 и 13. **25.** Возвести обе части в квадрат Показать, что при $b = a$ и $b^2 < 4a^2$ нет вещественных корней. **27.** 8100 франков; 9 сыновей. **28.** 7. **29.** Сначала сложить почленно все уравнения. **30.** 40 или 60 пистолей **31.** $(x + 1)(x + 4)(x^2 - 7) = 0$. **32.** $(x - 1)(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 0$. **33.** Решение Бинэ: так как выражение $t^3 - xt^2 - yt + z$ обращается в нуль при $t = a$, $t = b$ и $t = c$, то оно делится на $(t - a)(t - b)(t - c)$, причём частное равно единице: $t^3 - xt^2 - yt + z = (t - a)(t - b)(t - c) = t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t - abc$ Отсюда: $x = a + b + c$, $y = ab + bc + ca$, $z = abc$ **34.** 326 **35.** 1) Сначала возвести в куб, потом в квадрат 2) Так как $|x| \neq 1$, то обе части можно поделить на правую часть и обозначить: $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} = z$

36. После раздела у каждого была пятая часть всей суммы. До удвоения у четырёх было по $\frac{1}{10}$, у пятого $\frac{6}{10}$ всей суммы Перед вторым удвоением у первых трёх было по $\frac{1}{20}$, у четвертого $\frac{11}{20}$, у пятого $\frac{6}{20}$ и т. д. Ответ: 160 дукатов. **37.** Надо решить уравнение: $5x^2 - 125x + 552 = 0$. $x_1 = 5{,}72\cdots$; $x_2 = 19{,}27\cdots$ Было две встречи: одна по истечении 5 дней, другая по истечении 19 дней. **38.** Применить теорему Вьета о корнях и коэффициентах к уравнению: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

1) $x_1 - x_2 = x_2 - x_3$; $x_2 = -\frac{a}{3}$, $x_{1,3} = -\frac{1}{3a}\left(a^2 \mp \sqrt{a^4 - 27ac}\right)$.

2) $x_1 : x_2 = x_2 : x_3$; $x_2 = -\sqrt[3]{c}$,

$$x_{1,3} = -\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c^2}}$$

3) $2x_1x_3 = x_1x_2 + x_2x_3$, $3x_1x_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$;

$$x_1x_3 = \frac{b}{3}; \quad x_2 = \frac{-c}{x_1x_3} = -\frac{3c}{b};$$

$$x_{1,3} = \frac{1}{9c}\left(-b^2 \pm \sqrt{b^4 - 27bc^2}\right).$$

§ 13.

1. $x = 4 - 2y + \frac{y-1}{3}$; $y = 3a + 1$, $x = 2 - 5a$, где a — любое целое число **2.** $x = 11a + 4$, $y = 4a + 1$; a — любое целое число. **3.** Решить относительно y: $2y = 1 - 2x \pm \sqrt{8x + 601}$. Здесь надо, чтобы было. $8x + 601 =$

$= (2a+1)^2$. Находим: $x = \frac{a(a+1)}{2} - 75$, $y_1 = 76 - \frac{a(a-1)}{2}$, $y_2 = 75 - \frac{a(a+3)}{2}$. Единственное положительное решение: $x = 3$, $y = 10$.

4. $y = 2u$; $(x+1)^2 = 2(u^2+1)$, $u^2 + 1 = 2v^2$; $u = \pm 1$, $u = \pm 7$. $x = 1$, $y = \pm 2$; $x = -3$, $y = \pm 2$; $x = 9$, $y = \pm 14$; $x = -11$, $y = \pm 14$.

5. $2y = x + 1 \pm \sqrt{-3x^2 + 6x + 1}$. Надо, чтобы было: $-3x^2 + 6x + 1 = -3x(x-2) + 1 \geqslant 0$, т. е. $x = 0; 1; 2$. Этим значениям x соответствует по два значения y: 1,0; 2,0 и 2,1 **6.** $(y+1)(y^2 - y + 1) = x^2$, $y + 1 = a$, $y^2 - y + 1 = ab^2$, $a > 0$; $x = \pm ab$; $y^2 - y + 1 = (y+1)(y-2) + 3$; 3 делится на a. Имеем: $a = 1$; 3. $x = \pm 1$, $y = 0$; $x = \pm 3$, $y = 2$. Очевидное решение: $0, -1$. **7.** Положить $x = a + 1$. Получится: $y = \pm (a^2 - 3)$.

8. Уравнение можно представить в виде: $(x^2 - y^2)^2 + 2(xy-1)^2 = 0$. Отсюда: $xy = 1$, $x^2 = y^2$; $x = y = \pm 1$. **9.** $x^5 (x^3 - 1) - y^5 z$ Отсюда: $y = x$, $z = x^3 - 1$ при условии, что x и $x^3 - 1$ — простые числа. Единственное решение: 2, 2, 7. **10.** Если $x - y = 1$, то $y! = y^2$, $(y-1)! = y$. Отсюда находим: $y = 1$, $x = 2$. Если же $x - y = \kappa \geqslant 2$, то получается невозможное равенство. **11.** Возвести обе части в куб и приравнять коэффициенты при $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$: $x + 3y = a$, $3x + y = b$. Так как $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, то решение будет при условии, когда $3a - b$ делится на 8 и $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3$. Если обозначить $3a - b = 8m$, $3b - a = 8n$, то получится: $a = 3n - m$, $b = 3m + n$, $x = m$, $y = n$. **12.** Для взаимно простых m и n всегда можно подобрать такие целые числа a и b, что будет выполняться равенство: $bn - am = 1$. Общее решение: $x = \kappa^a \cdot A$, $y = \kappa^a \cdot B$ и $z = \kappa^b$ при условии, что $A^m + B^m = \kappa$. Для частного случая $m = 2$, $n = 3$ имеем: $a = 1$, $b = 1$; $x = A(A^2 + B^2)$, $y = B(A^2 + B^2)$; A и B — произвольные целые числа. **13.** $y = 10 + \frac{101}{x - 10}$; $x - 10 = \pm 1; \pm 101$. **14.** $(x + y - 3)(x - y + 3) = 35$

Из систем уравнений:

$$x + y - 3 = \pm 1; \pm 5; \pm 7; \pm 35,$$

$$x - y + 3 = \pm 35; \pm 7; \pm 5; \pm 1$$

получается 8 решений: 6,2; 6,4; — 6,2; — 6,4; 18,20; 18, —14; — 18,20 и —18,—14. **15.** $\frac{x(x+1)}{2} \cdot \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = y^2$. Надо потребовать, чтобы было:

$$2x + 1 = 3a^2 \text{ или } x = \frac{3a^2 - 1}{2}, \; a \text{ — нечётное.}$$

Тогда $y = \pm \frac{a(9a^4 - 1)}{8}$. **16.** Выделить целую часть:

$z = x - y + \frac{2y^2}{x + y}$ при $y < x$. **17.** Представить в виде: $7z = (10 - 7x)(yz + 1)$. Здесь $yz + 1$ делится на 7: $yz = 7a - 1$; $z = (10 - 7x)a$. Так как числа z и

a взаимно просты $(a \cdot 7 - yz = 1)$, то имеем: $a = 1$, $yz = 6$, $z = 10 - 7x$, $y = \frac{6}{z} = \frac{6}{10 - 7x}$. Получается единственное решение: 1, 2, 3. **18.** Сделать подстановку: $x = 5z$. Из уравнения: $5z^3 - 4 = 9y$ следует, что $z = 3a - 1$. Получается решение: $x = (3a - 1) \cdot 5$, $y = 15a^3 - 15a^2 + 5a - 1$; a - любое целое число. **19.** Уравнение можно переписать в таком виде: $x^3 - 1 + 3(x^2 - 1) - (y^2 - 6y)(x - 1) + 3 = 0$. Замечаем, что 3 делится на $x - 1$, т. е. $x - 1 = \pm 1; \pm 3$. Однако ни при каком из этих значений для y не получается целого значения. Решения нет. **20.** 1) Записать уравнение в виде: $2^x = (y - 1)(y^{z-1} + y^{z-2} + \cdots + y + 1)$ при $z > 1$ и учесть, что $y - 1$ есть делитель 2^x: $z = 2$, $x = 3$, $y = \pm 3$. При $z = 1$: $y = 2^x + 1$, $x = 0; 1; 2; \cdots$ 2) $2^x - 1 = 3^y$; $x = 2$, $y = 1$. 3) $x = 1$, $y = 1$; $x = 3$, $y = 3$. Начиная с $x = 4$, все суммы: $1! + 2! + \cdots + x!$ оканчиваются на 3, поэтому квадратами не могут быть **21.** $x + y = 2$, $xy = 1 - z^2$. Решить квадратное уравнение: $t^2 - 2t + 1 - z^2 = 0$. **22.** $z + x = \frac{y^2 + 1}{y - 3} = y + 3 + \frac{10}{y - 3}$; $y - 3$ есть делитель числа 10. **23.** Сложить почленно последние два уравнения. **24.** Если a, b, c, и d — одно из решений, то общее решение запишется так: $x = a^4 + 25b^4$, $y = 2abcd$, $z = -a^4 + 10a^2 b^2 + 25b^4$, $u = a^4 + 10a^2 b^2 - 25b^4$. Одно из частных решений: $x = 41$, $y = 12$, $z = 31$, $u = 49$. В более общем виде: $x = 41\kappa$, $y = 12\kappa$, $z = 31\kappa$, $u = 49\kappa$, где κ — любое целое число. **25.** Решается, как № 24. **26.** Если $a + b = A \cdot d$, $a^2 - ab + b^2 = B \cdot d$, то $3ab = d(A^2 d - B)$. Здесь $d = 1; 3$. При $d = 3$ имеем: $a = 7$, $b = 17$ или $a = 17$, $b = 7$. **27.** $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{5y - 1} = 5$. Обозначив: $\sqrt{5x - 1} + \sqrt{5y - 1} = 10m \pm 1$, получим: $x - y = 10m \pm 1$, $\sqrt{5x - 1} = 5m + 3$; $5m + 2$. Отсюда: $x = 5m^2 + 6m + 2$, $y = 5m^2 - 4m + 1$; $x = 5m^2 + 4m + 1$, $y = 5m^2 - 6m + 2$; m — любое натуральное число $(10m \pm 1 > 5)$. **28.** Обозначим первый коэффициент левой части уравнения через a и допустим наличие одного решения $x = m$, $y = k$. Тогда $am + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} ak = 1$ вычтем почленно из данного уравнения. Получим:

$$x = m - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(y - k),$$

являющееся иррациональным при натуральных m, y и k. Таким образом данное уравнение не может иметь больше одного решения. Единственное решение уравнения получается умножением обеих частей на $\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^n$:

$$x - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} y = \frac{(\sqrt{5})^n + C_n^1 (\sqrt{5})^{n-1} + C_n^2 (\sqrt{5})^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot \sqrt{5} + 1}{2^n},$$

приравниванием рациональных частей и коэффициентов при иррациональности $\sqrt{5}$:

$$y = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(C_n^{n-1} + 5 C_n^{n-3} + 5^2 C_n^{n-5} + \cdots \right)$$

$$x - \frac{1}{2^n} \left(C_{n+1}^n + 5 C_{n+1}^{n-2} + 5^2 C_{n+1}^{n-4} + \cdots \right)$$

Например, при $n = 2$ имеем решение: $x = 2$, $y = 1$; при $n = 3$ — решение: $x = 3$, $y = 2$. Если n придавать последовательные натуральные значения 1, 2, 3, $\cdots$, то решения составят пары соседних чисел Фибоначчи (см. № 63 § 3), причём: $y = U_n$, $x = U_{n+1}$. **29.** $(x + y)^2 - (xy + 1)xy$ Здесь xy и $xy + 1$ — взаимно простые числа, поэтому их произведение не может быть квадратом. **30.** Вычесть почленно: $b = 9a$, $a = 1$, $b = 9$, $c + d = 9$; $\overline{abcd} = 1936$.

31. Решить уравнение: $\frac{x(x+1)}{2} = \overline{yyy} = 111y = 3 \cdot 37y$.

Ответ: $x = 36$. **32.** $x = y = 2n - 1$, $z = 2n$ удовлетворяют уравнению. **33.** $1000 = 2^3 \cdot 5^3$; $1000 = xyz$, $x = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, $y = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$, $z = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$. **34.** По условию: $\overline{abc} + \overline{xyz} = 504 \cdot m$, $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{xyz}$ Отсюда имеем: $\overline{xyz} = 72m$, $\overline{abc} = 432m$, $m = 2$. **35.** Задача приводится к уравнению: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ относительно сторон треугольника. Таких треугольников существует только три: равносторонний со стороной 6 и равнобедренные со сторонами 8, 8, 4 и 12, 12, 3. **36.** $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{a-b}$. **37.** Если искомые дроби обозначить через $\frac{x}{y}$ и $\frac{z}{v}$, то из условия имеем: $x = 19v$, $y = 23z$; $x + y + z + v = 20v + 24z = 868$ или $5v + 6z = 202$. Отсюда: $z = 5k + 2$, $v = 38 - 6k$ при $k = 1, 3; 5$. **38.** Сначала найти числа $\overline{xyz} = m^2$ с условием: $x + y + z = n^2$. $N_1 = 400$, $N_2 = 441$, $N_3 = 484$. **39.** Новое число по условию должно быть точным квадратом, $(2N + 1)10^4 + N = 20001N + 10000 = x^2$. Отсюда: $(x - 100)(x + 100) = 3 \cdot 59 \cdot 113N = 6667 \cdot 3N$, если N — нечётное, то: $x - 100 = 6667$, $x + 100 = 3N$; $N = 2289$. Если N — чётное, то имеем: $x + 100 = 6667 \cdot 2$, $x - 100 = 2N_1$, отсюда $N = 4N_1 = 8756$ **40.** Пусть $a : b = c : d$, $a + d = 14$, $b + c = 11$ Тогда по условию будем иметь: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 317 - 4bc = 221$ n или $4bc = 317 - 221 \cdot n$. Отсюда $n = 1$, $bc = 24$. **41.** Решить уравнение: $xy = 6(x - y)$ или $y = 6 - \frac{36}{x+6}$. **42.** Пусть $N = \overline{abc}$. Тогда $N^{\kappa} - N$ — делится на 1000. В частности, N может быть только делителем $1000 : N(N^{\kappa - 1} - 1) = 125 \cdot 8 \cdot A$. Условию задачи удовлетворяют числа 376 и 625. **43.** $2 \cdot \overline{abc} = \overline{cab} + \overline{bca}$. Отсюда: $3b = 7a - 4c$, $b = 2a - c + \frac{a-c}{3}$.

Здесь $a = 3k + c$, $b = 7k + c$ при $k = -1; 0; 1$. Существует 15 таких чисел: $N_{1\ 9} = \overline{mmm}$ при $m = 1, 2, \cdots, 9$; $N_{10} = 370$, $N_{11} = 407$, $N_{12} = 481$, $N_{13} = 518$, $N_{14} = 592$, $N_{15} = 629$. **44.** Если обозначить искомое число через $\overline{aabb}$, то будем иметь уравнение: $11(100a + b) = x^2$. $x = 11y$, $100a + b = 99a + (a + b)$ делится на 11. Отсюда: $a + b = 11$, $9a + 1 = y^2$; $a = 7$, $b = 4$. **45.** По условию $N = \overline{abc} = 13 \cdot n$, $a + b + c = 13$. Отсюда находим: $9(11a + b) = 13(n - 1)$, $11a + b = 13k$; $N_1 = 247$, $N_2 = 364$, $N_3 = 481$, $N_4 = 715$, $N_5 = 832$ **46.** По условию $mn = 2x$, $\overline{cd} = 3x$; $x < 33$. $\overline{ab} \cdot 100 + 3x = 4x^2$, $ab \cdot 100 = x(4x - 3)$. $\overline{abcd} = 4096$. **47.** $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$; $a + b$ — точный квадрат, $\overline{ab}$ — точный куб. $\overline{ab} = 27$. **48.** По условию $2 \cdot \overline{ab} = a^3 - b^3$ или $2\overline{ab} = b^3 - a^3$; $\overline{ab} = 13$. **49.** $ab = 2 \cdot ab$. Отсюда заключаем, что $\overline{ab}$ делится и

на a и на b. Поэтому b делится на $2a$, $b = 2a \cdot k$, $k < 5$; $10a + 2ak = 2a \cdot 2ak$, отсюда $k(2a-1) = 5$, $k = 1$, $a = 3$, $ab = 36$. **50.** 1936. **51.** $N = \overline{abcd}$, $a + b + c + d = \overline{ab}$ или $c + d = 9a$. Отсюда $a = 1$; 2. Получаются числа: $N_1 = \overline{1\,bcd}$ при $c + d = 9$ и $N_2 = \overline{2b99}$. В обоих случаях b принимает значения от 0 до 9. Всего 110 чисел. **52.** $\overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001(a+d) + 110(b+c) = 140A$. Отсюда: $a + d = 10$, $b + c = 7$; a и d — чётные, поэтому, если $a = 2$, то $b = 3$, $c = 4$, $d = 8$. $\overline{abcd} = 2348$. **53.** $xy = \overline{abc} = z^3$, $\frac{x}{y} = v^2$. $x^2 = v^2 \cdot z^3$, $z = m^2$, $\overline{abc} = m^6$. Находим: $m = 3$, $\overline{abc} = 729$, $x = v \cdot m^3 = 27 \cdot v$, $y = \frac{x}{v^2} = \frac{27}{v}$, где $v = \pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 27$. **54.** $441 < \overline{abc} < 484$. Отсюда вытекает, что $a = 4$. Далее по условию имеем: $400 + 10b + c = 37 \cdot 4 + 36(b + c)$ или $27b + 36c - (b + c) = 9 \cdot 28$, т. е. $b + c = 9$ или 18. Кроме того, из равенства $26 \cdot b = 36 \cdot 7 - 35 \cdot c$ следует, что $b = 7$. Значит, $\overline{abc} = 472$. **55.** Искомое число $N = 142857$ получается при обращении дроби $\frac{1}{7}$ в десятичную: оно является периодом этой бесконечной десятичной дроби. **56.** Число всех учащихся определяется из неравенств: $10^{21} < x^{11} < 10^{22}$, $10^{22} < x^{12} < 10^{23}$; $21 < 11 \cdot \lg x < 22$; $x = 82$. Число учащихся первого класса y удовлетворяет уравнению: $y^2 = \overline{abc}$ при $a + b + c = 19$. Здесь $c = 1$; 4; 5; 6; 9 — возможные последние цифры точных квадратов. Получаем: $y = 28$; 26; 27. Для числа учащихся второго класса z и количества учащихся третьего класса v по условию имеем три системы уравнений: $z^2 + v^2 = 1466$, $z + v = 54$; $z^2 + v^2 = 1466$; $z + v = 58$ и $z^2 + v^2 = 1466$, $z + v = 65$ $z = 29$, $v = 25$, $y = 28$; $z = 25$, $v = 29$, $y = 28$. **57.** Если $x^2 = yz$, то при целых x, y и z отношение $v = \frac{y+z}{2x}$ (при $y \neq z$ из условия вытекает, что $y + z > 2x$) не может быть целым, так как система уравнений: $yz = x^2$, $y + z = 2xv$ приводится к уравнению: $t^2 - 2xv \cdot t + x^2 = 0$, корни которого иррациональны: $t = xv \pm x\sqrt{v^2 - 1}$. **58.** Из того, что диагональ прямоугольника должна выражаться целым числом, имеем: $x = (a^2 - b^2) \cdot k$, $y = 2ab \cdot k$ при взаимно простых a и b (см. решение уравнения Пифагора: $x^2 + y^2 = z^2$). Теперь решаем основное уравнение: $xy = 4(x+y) + \sqrt{x^2+y^2}$. Оно сводится к уравнению: $b(a-b)k = 4$. Отсюда при $k = 1$ имеем: $a = 5$, $b = 1$; $a = 5$, $b = 4$. При $k = 2$: $a = 3$, $b = 1$; $a = 3$, $b = 2$ и при $k = 4$: $a = 2$, $b = 1$. Получается: $x = 9$; 10; 12; $y = 40$; 24, 16.

59. $\overline{xy} = 12$; 32; 10; 21. **60.** Очевидные решения: $z = 3$, $x = 2$, $y = 1$ и $z = 3$, $x = 1$, $y = 2$. Так как $C_{x+y}^{x} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!}$ — целое число, то при $x \geqslant 3$ имеем: $2(x! + y!) = x!\,y!\,A$, где A — целое. Полагая $y > x$, отсюда получим, что y делится на $x!$, т. е. $y = x + k$ при $k \geqslant 1$, и первое уравнение системы перепишется так:
$2x![1 + (x+1) \cdots (x+k)] = x!(x+1) \cdots (x+k) \cdot (x+k+1) \cdots (2x+k)$.
Отсюда после преобразований приходим к невозможному равенству:

$$(x+1) \cdots (x+k)\,[(x+k+1) \cdots (2x+k) - 2] = 2.$$

61. $y = \frac{ab+c}{x-b} + a$.

62. 1) Надо решить уравнение: $z^2 = x^2 + y^2$. В своём решении автор по-

лагает: $y = x + 1$, $z = nx + 1$. 2) При $a = 2$ получаем уравнение № 12. Сам автор сначала находит рациональные решения, полагая: $x = my$, $z = ny$. **63.** 1) Надо решить систему уравнений: $6x + 4y + z = 200$, $x + y + z = 100$. Она имеет 7 решений: (20, 0, 80), (17, 5, 78), (14, 10, 76), (11, 15, 74), (8, 20, 72), (5, 25, 70), (2, 30, 68). Автор дал только одно решение: (11, 15, 74). 2) У каждого должно быть $3\frac{1}{2}$ бочки вина. Имеется два решения: 3, 1, 3; 3, 1, 3; 1, 5, 1 и 2, 3, 2; 2, 3, 2; 3, 1, 3. (Сначала указано число полных бочек, потом полуполных и, наконец, число пустых бочек). **64.** 9, 10 и 11. **65.** Надо решить систему: $17x+15=13y + 11=10z+3$. **66.** $x=31 \cdot 35 \cdot 39 \cdot a-2$, $y = 31 \cdot 35 \cdot 43 \cdot a - 2$, $z = 31 \cdot 39 \cdot 43 \cdot a - 2$, $u = 35 \cdot 39 \cdot 43 \cdot a - 2$; a — любое целое число. **67.** Из тождества Лагранжа:

$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 + (bz - cy)^2 + (az - cx)^2$ при $x = m^2 + n^2 - k^2$, $y = 2mk$ и $z = 2nk$, т. е. $x^2 + y^2 + z^2 = m^2 + n^2 + k^2$ получается, что:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{ax + by + cz}{m^2 + n^2 + \kappa^2}\right)^2 + \left(\frac{bx - ay}{m^2 + n^2 + \kappa^2}\right)^2 + \left(\frac{bz - cy}{m^2 + n^2 + k^2}\right)^2 + \left(\frac{az - cx}{m^2 + n^2 + k^2}\right)^2.$$

68. Супругами являются: Джон и Дженни, Питер и Китти, Алексис и Мэри. **69.** Пусть $x : y = z : u$. Тогда по условию: $x + u = 2s$, $y + z = 2s_1$, $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 4c^2$. Учитывая, что $xu = yz$, возведём в квадрат первые уравнения и из их суммы вычтем последнее. Получим: $xu = s^2 + s_1^2 - c^2 = m$. Далее решаем системы: $x + u = 2s$, $xu = m$ и $y + z = 2s_1$, $yz = m$. В самом конце m заменим его значением (Решение Бурдона). **70.** $z = 9$, $2x + 3y = 68$. Общее решение: $z = 9$, $y = 2a$, $x = 34 - 3a$. Неотрицательные целые решения получаются при $a = 0; 1; 2; \cdots; 10; 11$. **71.** Решается с помощью тождества Баризена (см. № 53, § 3):

$x = a$, $y = b$, $z = a + b$, $u = a^2 + ab + b^2$, $v = ab$, $k = a(a + b)$, $t = b(a + b)$.

§ 15.

1. Применить теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом. **2.** Применить вышеуказанную теорему к числам $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$. **3.** Достаточно показать справедливость неравенств:

$$b < \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 < a.$$

4. См. п. 5 § 14. **6.** Воспользоваться неравенством:

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} > 2$$

при различных положительных m и n. **6.** Левую часть представить в виде суммы двух квадратов. **7.** Использовать неравенство задачи № 2. **8.** $a^4 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) - a^2 b^2 \geqslant (a^2 + ab + b^2)ab - a^2 b^2$. **9.** Доказывается непосредственными преобразованиями. **11.** 1) Из

неравенства: $a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$ вытекает неравенство: $a^3 + b^3 \geqslant ab(a+b)$, а отсюда: $3(a^3 + b^3) + a^3 + b^3 \geqslant 3ab(a+b) + a^3 + b^3 = (a+b)^3$. 3) Использовать первое из предыдущих неравенств. Достаточно показать, что $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$. **12.** Использовать неравенство задачи № 7. **13.** Решить неравенство относительно y. Корни трёхчлена равны, а старший коэффициент положителен. **14.** Рассмотреть равенство: $(1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + [a \cdot b(1-c) + bc + ca]$. **15.** Применить неравенство Коши-Буняковского (см. § 17). **16.** Дискриминант уравнения $D = -16S^2$, где S — площадь треугольника со сторонами a, b и c. **18.** У трёхчлена: $y^2(1-b^2) - 2abxy + x^2(1-a^2)$ старший коэффициент $1 - b^2 > 0$, а дискриминант отрицателен, поэтому все значения трёхчлена положительны. **19.** Если для бесконечного множества радикалов левую часть обозначить через x, то получится уравнение: $x^2 = a + x$, имеющее положительный корень:

$$x = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Для конечного числа радикалов левая часть меньше этого числа. **20.** В неравенстве Коши-Буняковского положить $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$. **21.** 1) К числам: $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}$ применить теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом. 2) Рассмотреть неравенства: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$. 3) Использовать неравенства:

$$\sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} < \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n},$$

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} < \frac{2+4+6+\cdots+2n}{n}.$$

22. Обозначить: $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$ и взять $\cos(\alpha+\beta)$. **23.** Пусть знаменатель прогрессии равен q $(q<1)$. Тогда по условию имеем:

$$1 = k \cdot \frac{q}{1-q},\ q = k \cdot \frac{q^2}{1-q},\ q^2 = k \cdot \frac{q^3}{1-q},\ \cdots,\ q^n = k \cdot \frac{q^{n+1}}{1-q},\ \cdots$$

Отсюда находим:

$$1 + q + q^2 + \cdots - q^n + \cdots = \frac{kq}{1-q}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots),$$

$q = \frac{1}{k+1} < 1$, $k > 0$. Сумма прогрессии $s = \frac{k+1}{k}$.

24. 1) Перемножить почленно неравенства:
$a^2 \geqslant a^2 - (b-c)^2$, $b^2 \geqslant b^2 - (c-a)^2$ и $c^2 \geqslant c^2 - (a-b)^2$.
2) Применить формулы: $ah_a = bh_b = ch_c = 2s$ и $4RS = abc$.
3) Сводится к № 2. 4) Свести к 1. **25.** Пусть $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$ и мы можем написать неравенства: $ad_a + ad_b + ad_c \geqslant 2s = ah_a$ и $cd_a + cd_b + cd_c \leqslant 2s = ch_c$. Частный случай соответствует точке пересечения биссектрис внутренних углов: $d_a = d_b = d_c = r$. **26.** К числам $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и к числам $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ применить теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом.
27. Перемножить почленно следующие равенства и неравенства:

$n \cdot 1 = n$, $(n-1) \cdot 2 > n$, $(n-2) \cdot 3 > n$, $\cdots$, $3(n-2) > n$, $2(n-1) > n$, $1 \cdot n$ n. **28.** Пусть плечи весов a и b, грузы соответственно x и y. Тогда $ax = 1 \cdot b$, $by = 1 \cdot a$ Отсюда $x + y = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$. Торговец прогадал

29. 1) $-5 < x < -3$ и $2 < x < \infty$. 2) $-2 < x < 0$ и $3 < x < \infty$. 3) $-1 < x < 1$ и $1 < x < \infty$. 4) $0 < x < 3$ и $12 < x < \infty \cdot 5) -1 \leqslant x \leqslant 3$. 6) Если $a > 0$, то $a \leqslant x < \infty$ и $-\infty < x$ $-a$; если $a < 0$, то $-a \leqslant x < \infty$ и $-\infty < x \leqslant a$. 7) Если $a > b$, то $-\sqrt{ab} < x < 0$ и $\sqrt{ab} < x < \infty$; если $a < b$, то $-\infty < x < -\sqrt{ab}$ и $0 < x < \sqrt{ab}$. **31.** 1) Должно быть: $a > 0$, $D = (a-1)^2 - 4a^2 < 0$. Получается $a > \frac{1}{3}$. 2) $a > 6$. **32.** Надо решить систему: $3x^2 y - y^3 = 0$, $x^3 - 3xy^2 > 8$. Если $y = 0$, то $2 < x < \infty$; если $y^2 = -3x^2$, то $x^3 < -1$; $-\infty < x < -1$.

§ 16.

1. 11. **2.** $-\frac{25}{19}$ и 5. **4.** Пусть $a_к + a_{п-к+1} = s$, n — число членов прогрессии. Тогда для произведения этих членов прогрессии $a_к \cdot a_{п\ к+1} = u$ имеем: $4u - s^2 - (a_{п\ к+1} - a_к)^2$.

5. Пусть $a = b - \alpha$, $c = b + \alpha$. Тогда $2p = 3b$, $2pr = 3br = bh_b$. **7.** Уничтожить иррациональность в знаменателях. **9.** Из системы уравнений:

$$a_1(1+q)(1+q^2) = a, \quad a_1^2(1+q^2)(1+q^4) = b$$

исключить a_1 и в полученном возвратном уравнении ввести подстановку:

$$q + \frac{1}{q} = \frac{1}{z} \text{ или } z = \frac{q}{1+q^2}.$$

Получится уравнение:

$$a^2 z^2 + \frac{b}{a} \cdot az - \frac{a^2 - b}{2},$$

где $az = s$ — сумма средних членов. **10.** Если $\frac{b}{3} < a^2 < b$, то

$$q = \frac{-a^2 \quad b^2 \pm \sqrt{(3a^2 \quad b)(-a^2 + 3b)}}{2(b - a^2)}, \quad a_1 = \frac{a}{1+q+q^2}.$$

Если $b < a^2 < 3b$, то

$$q = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(3a^2 - b)(-a^2 + 3b)}}{2(a^2 - b)}, \quad a_1 = \frac{a}{1+q+q^2}.$$

11. $d = \frac{2(an + b - a_1)}{n-1}$, где a_1 — первый член. **12.** $a_1 = 1$, $q = 5$. **13.** 510. **14.** 5, 15, 45 и 135. **15.** 4. **17.** 4, 6 и 9. **18.** $a_п - k + m - n$. **20.** $-a$, $3a$, $5a$, $\cdots$, $(2m-1)a$, $\cdots$ при любом действительном значении a. Число $k = \frac{1}{n(n+2)}$ не зависит от m. **21.** Использовать формулу для $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2$.

$a_1 = \frac{m(n+1) \mp \sqrt{3kn(n^2-1)(kn-m^2)}}{n(n+1)}$; $d = \pm 2\sqrt{3}\frac{(n^2-1)(nk-m^2)}{n(n^2-1)}$)

§ 18.

1. 9. **2.** 4. **3.** -1 **4.** $y_{\text{наиб.}} = \sqrt{a+1}$. **5.** $y_{\text{наим.}} = -1$ **6.** $y_{\text{наим.}} = -1$, $y_{\text{наиб.}} = 1$ **7.** $y_{\text{наим.}} = \frac{1}{24}$. **8.** $y_{\text{наим}} = -\frac{19}{20}$.

9. Если $a > 0$, то $y_{\text{наим}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2a}$, $y_{\text{наиб.}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2a}$; если $a < 0$, то $y_{\text{наим.}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2a}$, $y_{\text{наиб}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2a}$; если $a = 0$, то функция не ограничена. **10.** Если $a \neq 0$, то наименьшее из положительных значений равно $2(a + |a|\sqrt{2})$, наибольшее из отрицательных значений равно $2(a - |a|\sqrt{2})$; если $a = 0$, то при n четном $y_{\text{наим}} = 0$, при n - нечётном функция возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. **11.** $\frac{x}{m} = \frac{a-x}{n} = \frac{a}{m+n}$;

$$y_{\text{наиб}} = \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n} \cdot m^m \cdot n^n$$

12. При $x = 2 \cdot y - 4$ Отсюда имеем $4a + b = 8$ Поскольку при крайних значениях дискриминант соответствующего уравнения $(a - y)x^2 + 5y \cdot x + b - 4y = 0$ должен обращаться в нуль, решаем уравнение $D = 9y^2 + 4(4a + b)y - 4ab = 0$. Полагая в нём $y = -4$ и принимая во внимание равенство $b = 8 - 4a$, находим: $a = 1$, $b = 4$ Далее из неравенства $D \geqslant 0$ получаем $y \geqslant \frac{4}{9}$ и $y \leqslant -4$ **13–16.** Желательно построить графики функций для каких-нибудь частных случаев **17.** $ax + by + cz = 2s$ – постоянная величина (S площадь треугольника) Применить неравенство Коши-Буняковского **18.** Сделать чертёж. Провести $AC \perp CD$ (C и D — на дороге l) и обозначить $\angle BAC$ через α Легко получается, что наименьшее время будет при наименьшем значении выражения $\frac{b - a\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 0 или выражения $u = \left(\frac{b - a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$ Имеем: $U = \frac{(a - b\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = b^2 - a^2$

Наименьшее значение U получается при $a = b\sin\alpha$, т е $\sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot BC = \frac{al}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ — на таком расстоянии от пункта C пешеход должен выйти на дорогу Очевидно, в случае $CD = \frac{al}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ пешеход сразу должен взять направление на конечный пункт своего пути село D **19.** Пусть MN — наибольший отрезок, проходящий из канала I в канал II Очевидно,

этот отрезок одновременно фиксирует положение плота наибольшей длины, проходящего из одного канала в другой Легко показать, что MN — наименьший из всех отрезков, проходящих через точку O до противоположных берегов каналов OA и OD Отрезку MN соответствует угол $x = 45°$ $MN = 2a\sqrt{2}$ В самом деле Если $x = 45° \pm \alpha$, $(\alpha < 45°)$, то

$$M_1N_1 = \frac{a}{\cos x} + \frac{a}{\sin x} \quad \frac{2a \cdot 2 \cdot \sin 45° \cdot \cos \alpha}{\sin (90° \pm 2\alpha)} =$$

$$= 2a \left(2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \right) > 2a\sqrt{2},$$

так как $\cos \alpha > \cos 2\alpha$

Длина плота равна $MN \quad 2b = 2(a\sqrt{2} - b)$, $a > b$ **20.** Решается аналогично № 18 Пешком надо пройти 6 *км* Времени потратит всего 1 час 37 мин. **21.** Начертить прямой угол BAC Пусть наименьшее расстояние между кораблями будет по истечении x часов Тогда из уравнения $y^2 = (9x)^2 + (75 \quad 12x)^2$ или $y^2 = 15^2 [(x-4)^2 + 9]$ находим $x = 4$ Наименьшее расстояние $y_{\text{наим}} \quad 45$ *км*. **22.** Воспользоваться формулой освещённости $I = c \frac{\cos \varphi}{r^2}$, где r — расстояние от источника света, φ — угол падения луча, c постоянное для данной лампы число Имеем $h \quad l \cdot \operatorname{ctg} \varphi$, $r^2 - l^2 \quad \operatorname{cosec}^2 \varphi$ Надо найти наименьшее значение функции

$$I = \frac{c}{l^2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi \quad \frac{c}{l^2} (\cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sin^2 \varphi)^1$$

Получается $\operatorname{ctg} \varphi \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$, $h = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

23. Пусть $CC_1 \perp AB$, $BC_1 = x$, $AC_1 = b$ Тогда задача сводится к нахождению наименьшего значения функции:

$$y = (b - x) \quad m + n\sqrt{a^2 + x^2}$$

Рассматриваем дискриминант уравнения

$$x^2 (n^2 \quad m^2) - 2m (y - bm) x - y^2 + 2bmy + a^2 n^2 \quad b^2 m^2 = 0$$

Неравенство $D \geqslant 0$ даёт: $y_{\text{наим}} \quad bm + a\sqrt{n^2 \quad m^2}$ и соответствующее значение x

$$x = \frac{m(y - bm)}{n^2 - m^2} = \frac{am}{\sqrt{n^2 - m^2}},$$

если

$$\frac{am}{\sqrt{n^2 - m^2}} \leq AC_1$$

Если же окажется, что

$$\frac{am}{\sqrt{n^2 - m^2}} \geqslant AC_1,$$

то шоссе должно пройти по прямой AC **24.** Надо найти наименьшее значение функции:

$$y = \frac{a + k \cdot x^3}{24x},$$

где k — коэффициент пропорциональности, x — скорость судна. Представить функцию в виде трех положительных слагаемых, произведение которых постоянно:

$$y = \frac{a}{48x} + \frac{a}{48x} + \frac{k}{24} \cdot x^2.$$

$$y_{\text{наим}} = \frac{1}{16}\sqrt[3]{2a^2k} \text{ при } x = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}.$$

§ 20

1. 2) Применить метод математической индукции. 3) Следует из предыдущего тождества. 7) Каждое из чисел 2, 3, $\cdots$, n в левой части встречается $n-1$ раз. 8) Можно воспользоваться тождеством: $(3k-2)! + (3k-1)! + (3k)! = (3k-2)! \cdot (3k)^2$. 9) Разделить обе части на $n!$ 10), 11), и 12)— Можно применить метод математической индукции. 13) Воспользоваться тождеством:

$$\frac{m}{(m+1)!} = \frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!}.$$

14) В тождестве $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ приравнять коэффициенты при x^k. 16) и 17) — Применить метод математической индукции. 18) Если левую часть обозначить через S_n, то имеет место тождество:

$$S_k - S_{k-1} = \frac{1}{k}$$

В этом тождестве последовательно положить $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ и полученные равенства сложить почленно. **2.** 1) Умножить обе части на $n!$ 2) Применить тождество

$$C_n^k \cdot C_k^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{n-k}.$$

9) Применить метод математической индукции 10) В выражении для $\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}$ положить $x = 1$. **3.** $40! > 10^{40}$ **4.** На 3^{182}. **5.** Надо решить уравнение:

$$C_n^{k-1} + C_n^{k+1} = 2C_n^k.$$

Получится: $n = a^2 - 2$, $k_1 = \frac{a(a+1)}{2} - 1$, $k_2 = \frac{a(a-1)}{2} - 1$ **6.** Члены разложения рассматриваемого бинома сначала растут, потом убывают. Если искомый член имеет номер $k+1$-й, то надо решить неравенство:

$$C_n^{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1} \leqslant C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

7. В тождестве: $(a+b)^n \cdot (a+b)^n = (a+b)^{2n}$ сопоставить коэффициенты при $a^n b^n$. **8.** Применить метод математической индукции. **9.** 1) $x = 1; 2; 3, 4$ 2) $x = 2$. 3) Обозначить: $ax - b = y$; $y = 1; 2$ **10.** Пусть собрались 2 члена комиссии. Тогда им не хватает хотя бы одного ключа (к одному замку), ключ этот имеется у любого из трёх остальных членов комиссии Так как это происходит при любой комбинации из двух человек, то общее число замков равно числу сочетаний из 5 элементов по 2, т. е C_5^2 Но к

каждому замку имеется 3 ключа, поэтому общее число ключей равно $C_5^2 \cdot 3 = 30$. Отсюда следует, что каждому члену комиссии необходимо иметь 6 ключей. Число замков равно 10. **11.** 576 **12.** 360

Глава III.

§ 2.

1. Обозначить: $m_a = 3x$, $m_b = 3y$; $c = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{5}}$.

3. $\dfrac{\delta_A^2 \sqrt{m_a^2 - h_a^2}}{2h_a \sqrt{\delta_A^2 - h_a^2}}$. **4.** $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$; $\delta_A^2 = bc\,\dfrac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$;

$h_a^2 = \dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$. **8.** Задача сводится к решению в целых числах уравнения $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$. Таким свойством обладает, например, треугольник со сторонами 4; 8; 8. **9.** Данные три равенства можно привести к следующему виду:

$$(mkr - nls)(nl - mk) = 0,$$

$$(mks - nlr)(lr - ks) = 0,$$

$$(nks - mlr)(mr - ns) = 0.$$

Приравнивая нулю один из сомножителей левой части каждого равенства и комбинируя их, можно прийти к следующим возможностям: а) $m = n$, $k = l$, $r = s$; б) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{l}{k} = \dfrac{s}{r}$. Случай а) геометрически может означать

1) шестиугольник с тремя парами равных сторон;

2) треугольник со сторонами $2m$, $2k$, $2r$ с проведёнными в нём медианами;

3) треугольник со вписанной в него окружностью, в котором расстояния от вершин до точек касания равны m и n; k и l; r и s

Геометрической интерпретацией случая б) могут быть:

1) два подобных треугольника со сторонами n, k, r и m, l, s;

2) угол, на сторонах которого параллельные прямые отсекают отрезки m, l, s и n, k, r.

10. $\dfrac{d^2 r}{2\sqrt{d^2 - r^2}}$. **11.** $\dfrac{2(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}{5}$. **12.** $\dfrac{c}{2}(\sqrt{2} - 1)^3$ Воспользоваться равенством $r = \dfrac{a + b - c}{2}$, где r — радиус вписанного круга; a, b — катеты, c — гипотенуза. **13.** $\dfrac{3}{4}S$ Продолжить одну из медиан за основание треугольника на $\dfrac{1}{3}$ её длины, соединить конец этого отрезка и точку пересе-

чения медиан с концом основания. Площадь полученного треугольника составляет $\frac{1}{6}$ площади данного треугольника и $\frac{2}{3}$ площади треугольника, сторонами которого являются медианы данного **14.** $7S$. Площадь каждого из треугольников, образовавшихся при вершинах данного, составляет $\frac{2}{9}$ площади данного. **15.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. **16.** $R(\sqrt{3}-1)$. **17.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. Каждый из полученных треугольников подобен основному.

19. 1) $BD=\frac{9}{4}(a-10)$, $BP=\frac{90-5a}{4}$;

2) при $a=\frac{90}{7}$.

3) задача возможна при $10<a<14$.

20. 2 *м*³. **21.** 1) $\frac{\pi}{2}(d^2-m^2-n^2)$ 2) $2\sqrt{2(d^2-m^2-n^2)}$. **22.** Нет.

23. $\sqrt{c^2-d^2}$; $a\parallel b$, $a>b$. **24.** $\frac{2ab}{a-b}$. **25.** $\frac{2ab}{a+b}$.

26. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **27.** $\frac{c^2}{8}(9+4\sqrt{3})$. **28.** Воспользоваться соотношениями: $abc=4RS$, $S=pr$. **29.** $\frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}$. **30.** $\frac{1}{2}(m+n)\sqrt{mn}$.

32. $\sqrt{a^2-b^2}$. **33.** $2R$; $\frac{\pi R^2}{2}$; $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}$; $\frac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}$.

37. $\frac{2rpn}{\sqrt{4n^2r^2-p^2}}$, где n — число сторон многоугольника, p — периметр вписанного многоугольника, r — радиус круга.

§ 5.

1. Если произвольную точку основания правильной n-угольной пирамиды соединить со всеми вершинами пирамиды, то получится n пирамид с одинаковыми основаниями, которые в совокупности дают данную пирамиду. Поэтому для суммы указанных расстояний имеем:

$$h_1+h_2+\ldots+h_n=\frac{3v}{S},$$

где v — объём пирамиды, S — площадь одной боковой грани. **2.** $128\sqrt{137}$ *дм*³. **3.** 13 *см*. **4.** Учесть, что центр тяжести треугольника находится в пересечении его медиан. **7.** Дуга окружности диаметра OA ($OA\perp l$), центр шара O — середина этой дуги, если l не проходит через центр шара. **8.** Периметр сечения равен $2a$. Если в сечении получится квадрат, то ребра AC, AD, BC и BD разделятся пополам. **9.** $r\sqrt[3]{15}$. **10.** $\sqrt{a^2-am+m^2}$, $\sqrt{a^2-an+n^2}$ и $\sqrt{a^2-a(m+n)+m^2-mn+n^2}$. **11.** $x=24$ *см*. **12.** $\frac{1}{2}\pi h^2$. **13.** $a^2(3+\sqrt{3})$ и $\frac{2}{3}a^3$. **14.** 520 *см*² и 50 *см*³.

15. $R(\sqrt{5}-2)$ — расстояние от центра шара до сечения. **16.** $r=\frac{6\pi}{3\pi-1}$ *м*; $h=\frac{18\pi-12}{3\pi-1}$ *м*. **17.** $v=\frac{x}{6}\sqrt{a^4-x^4}=\frac{1}{6}(x^4)^{\frac{1}{4}}\cdot(a^4-x^4)^{\frac{1}{2}}$, где x — сторона основания пирамиды. **22.** 1) $\frac{\pi a^2}{4}$, $\frac{4\pi a^3}{75\sqrt{5}}$. **25.** Сторона основания параллелепипеда равна $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **26.** Надо найти наибольшее значение площади поперечного сечения жёлоба $S=(10+x)^{\frac{3}{2}}(10-x)^{\frac{1}{2}}$; $2x+10$ — (ширина жёлоба сверху) равна 20 *см*. **27.** $\frac{Sx}{2}-\pi x^3=\frac{x\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2\pi}}(\sqrt{S}+x\sqrt{2\pi})(\sqrt{S}-x\sqrt{2\pi})$, ($x$ — радиус основания). Подберём положительные числа κ и l так, чтобы в выражении $U=x\sqrt{2\pi}[\kappa(\sqrt{S}+x\sqrt{2\pi})][l(\sqrt{S}-\sqrt{2\pi})]$ сумма сомножителей была постоянна. Для этого надо, чтобы было $\sqrt{2\pi}+\kappa\sqrt{2\pi}-l\sqrt{2\pi}=0$ или $l=\kappa+1$. Используем условие экстремума: $x\sqrt{2\pi}=\kappa(\sqrt{S}+x\sqrt{2\pi})=l(\sqrt{S}-x\sqrt{2\pi})$. Отсюда находим: $x\sqrt{2\pi}(1-\kappa)=\kappa\sqrt{S}$, $x\sqrt{2\pi}(1+l)=l\sqrt{S}$. Исключив теперь x, найдем: $\kappa=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $l=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. **28.** $2\sqrt{2}$. **29.** Радиус основания и высота бака должны равняться $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$. **30.** $R=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2r^2h}$ и $R=\frac{1}{2}\sqrt[3]{6r^2h}$, где r и h — радиусы основания и высота конуса и цилиндра. **31.** $h=\frac{R}{3-n}$, где $n<3$ — данное отношение, h — высота сегмента. **32.** $\pi\approx\frac{22}{7}$. **33.** $\pi\approx\frac{22}{7}$. **34.** Радиусы сечения равны $\sqrt[3]{\frac{13}{6}}$ и $\sqrt[3]{\frac{47}{12}}$. **35.** $OP=\frac{a\pm\sqrt{a^2-2m}}{2}$ при $m\leqslant\frac{a^2}{2}$. Оба значения OP подходят, так как $OP<a$. Наибольшее значение площади кольца равно $\frac{\pi a^2}{2}$ и достигается при $OP=\frac{a}{2}$.

ГЛАВА IV.

§ 1.

1. Воспользоваться формулой синуса суммы двух углов. **2.** Воспользоваться формулой косинуса суммы двух углов. **3.** $\cos^6 a+\sin^6 a=(\cos^2 x)^3+(\sin^2 x)^3=1-\frac{3}{4}\sin^2 2a$. **4.** Воспользоваться тождеством: $\cos^2 2a=$

$= (2\cos^2 a - 1)^2$. **6.** $1 + \cos 2a \cdot \cos 2b = \cos^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2 a \cdot \sin^2 b -$ $- \cos^2 a \cdot \sin^2 b - \sin^2 a \cdot \cos^2 b \pm \sin^2 b + \cos^2 b = \cos^2 a \cdot \cos^2 b +$ $+ \sin^2 a \cdot \sin^2 b + \sin^2 b (1 - \cos^2 a) + \cos^2 b (1 - \sin^2 a) = 2 (\sin^2 a \cdot \sin^2 b +$ $+ \cos^2 a \cdot \cos^2 b)$. **8—9.** Докажем эти тождества методом математической индукции: I. Нетрудно проверить, что при $n = 2$ тождества верны:

$$\sin (a_1 + a_2) = \cos a_1 \cdot \cos a_2 (\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2),$$

$$\cos (a_1 + a_2) = \cos a_1 \cdot \cos a_2 (1 - \operatorname{tg} a_1 \cdot \operatorname{tg} a_2).$$

II. Пусть для $n = \kappa$ данные тождества выполняются. III. Докажем, что при допущении II данные тождества будут выполняться и для $n = \kappa + 1$. Действительно, $\sin (a_1 + a_2 + \cdots + a_\kappa + a_{\kappa+1}) = \sin (a_1 + a_2 + \cdots + a_\kappa) \cos a_{\kappa+1} +$ $+ \cos (a_1 + a_2 + \cdots + a_\kappa) \cdot \sin a_{\kappa+1} = \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdots \cos a_\kappa \cdot \cos a_{\kappa+1} (S_1 -$ $- S_3 + \cdots) + \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdots \cos a_\kappa \cdot \sin a_{\kappa+1} (1 - S_2 + S_4 - \cdots) =$ $= \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdots \cos a_\kappa) \cdot \cos a_{\kappa+1} \cdot [(S_1 - S_3 + \cdots) + (1 - S_2 + S_4 -$ $- \cdots) \operatorname{tg} a_{\kappa+1}] = \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdots \cos a_{\kappa+1} [(S_1 + \operatorname{tg} a_{\kappa+1}) - (S_3 +$ $+ S_2 \cdot \operatorname{tg} a_{\kappa+1}) + \cdots] = \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdots \cos a_{\kappa+1} \cdot (S_1 - S_3 + \cdots)$, где S_1, $S_3, \cdots$ обозначают соответственно суммы уже для $\kappa + 1$ аргумента. Следовательно, формула верна для $n = \kappa + 1$, а значит верна вообще.

Аналогично доказывается и второе тождество. **10—11.** Воспользоваться результатами №№ 8 и 9.

12. $$\cos\left(a + \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a - \frac{b}{2}\right) = -2 \sin \frac{b}{2} \cdot \sin a .$$

$$\cos\left(a + \frac{3b}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{b}{2}\right) = -2 \sin \frac{b}{2} \cdot \sin (a + b) .$$

$$\cos\left(a + \frac{5b}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{3b}{2}\right) = -2 \sin \frac{b}{2} \cdot \sin (a + 2b) .$$

$$\cos\left(a + \frac{2n-1}{2} b\right) - \cos\left(a + \frac{2n-3}{2} b\right) = -2 \sin \frac{b}{2} \sin [a + (n-1) b].$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$\cos\left(a + \frac{2n-1}{2} b\right) - \cos\left(a - \frac{b}{2}\right) = -2 \sin \frac{b}{2} \left\{\sin a + \cdots + \right.$$
$$\left. + \sin \left[a + \left(n - 1\right) b\right]\right\};$$

$$-2 \sin \left(a + \frac{n-1}{2} b\right) \cdot \sin \frac{n}{2} b = -2 \sin \frac{b}{2} \left\{\sin a + \cdots + \right.$$
$$\left. + \sin \left[a + \left(n - 1\right) b\right]\right\}.$$

Разделив это равенство на $-2 \sin \frac{b}{2}$ мы получим доказываемое тождество **13.** Это тождество можно доказать тем же способом, что и № **12,**

только вместо разностей косинусов нужно взять разность синусов. Кроме того, №№ 12 и 13 легко доказать методом математической индукции. **14—17.** Воспользоваться результатами №№ 12 и 13 **18.** Это тождество легко доказывается методом математической индукции

I. Пусть $n = 1$. Тогда $\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} 2a = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \operatorname{ctg} 2a$.

II. Допустим, что данное тождество справедливо для $n = \kappa$.

III. Докажем, что при допущении II, тождество верно для $n = \kappa + 1$. В самом деле, $\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} 2a + \cdots + \operatorname{cosec} 2^{\kappa} a + \operatorname{cosec} 2^{\kappa+1} a =$

$$= \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \operatorname{ctg} 2^{\kappa} a + \operatorname{cosec} 2^{\kappa+1} a = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \frac{2\cos^2 2^{\kappa} a - 1}{\sin 2^{\kappa+1} a} =$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \frac{2\cos^2 2^{\kappa} a - \cos^2 2^{\kappa} a - \sin^2 2^{\kappa} a}{\sin 2^{\kappa+1} a} = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} -$$

$$- \frac{\cos^2 2^{\kappa} a - \sin^2 2^{\kappa} a}{\sin 2^{\kappa+1} a} = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \frac{\cos 2^{\kappa+1} a}{\sin 2^{\kappa+1} a} = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \operatorname{ctg} 2^{\kappa+1} a.$$

Тождество оказалось верным для $n = \kappa + 1$, значит оно верно для любого n. **20.** Перенести все слагаемые левой части направо и сгруппировать вместе функции одинакового аргумента. **22.** Воспользоваться формулами перехода от произведения тригонометрических функций к их сумме. **23.** Перенести одну из дуг левой части через знак равенства и взять от обеих частей тангенс. **24.** Воспользоваться формулой $\sin 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \sec^2 \alpha$. **31.** В равенстве $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ заменить стороны по формулам $a = 2R \cdot \sin A$, $b = 2R \cdot \sin B$, $c = 2R \cdot \sin C$. **32.** С помощью формул приведения можно это тождество привести к виду № 1. **35.** Преобразуем правую часть следующим образом:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{ab \sin C}{2p} = \frac{4R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)} =$$

$$= 2R \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2\sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} =$$

$$= R \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\cos \frac{C}{2}\left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right)} = 4R \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$1 + \frac{r}{R} = 1 + 4\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \cos A + \cos B + \cos C.$$

36. Заменив стороны треугольника через радиус описанной окружности и синусы противолежащих углов, получим

$$8R^3 \sin B \left(\frac{3}{4} - \sin^2 B\right) = 8R^3 \sin C \left(\frac{3}{4} - \sin^2 C\right).$$

Сократив на $8R^3$ и произведя группировку, перепишем это равенство так:

$$\frac{3}{4}\left(\sin B-\sin C\right)=\sin^3 B-\sin^3 C.$$

38. Воспользоваться формулами:

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}};\quad r=\frac{1}{p}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$r_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

43. См. задачу № 38. **44.** $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$.

45. По условию $\sin A+\sin B=2\sin B$. Или $2\sin\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}=$ $=4\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$. Так как $\frac{A+C}{2}+\frac{B}{2}=90°$, то $\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$. Или $\cos\frac{A-C}{2}-\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2}$; $\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}$. Разложив правую часть на множители: $\sin\frac{B}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$. Разделив обе части равенства на произведение $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$ и умножив почленно на равенство $\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$, будем иметь:

$$\frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}=2\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\quad\text{или}\quad\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}.$$

48. Воспользоваться формулой для выражения биссектрисы внутреннего угла треугольника через его стороны. **61.** Сложить равенства:

$$\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}2a=\sin a\cdot\operatorname{cosec}a\cdot\operatorname{cosec}2a,$$
$$\operatorname{ctg}2a-\operatorname{ctg}3a=\sin a\cdot\operatorname{cosec}2a\cdot\operatorname{cosec}3a,$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$\operatorname{ctg}(n-1)a-\operatorname{ctg}na=\sin a\cdot\operatorname{cosec}(n-1)a\cdot\operatorname{cosec}na.$$

После соответствующих преобразований получится: $\sin(n-1)a\cdot\operatorname{cosec}^2 a\cdot\operatorname{cosec}na$. **62.** $\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos a_1\cdot\cos(a_1+n\alpha)}$. **63.** Сложить почленно равенства:

$$\operatorname{arc\,tg}2x-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+1\cdot 2x^2},$$
$$\operatorname{arc\,tg}3x-\operatorname{arc\,tg}2x=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+2\cdot 3x^2},$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$\operatorname{arc\,tg}(n+1)x-\operatorname{arc\,tg}nx=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+n(n+1)x^2}.$$

После соответствующих преобразований получится:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{nx}{1+(n+1)x^2}.$$

64. $A=\frac{\pi}{6}$, $B=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{\pi}{2}$. **65.** Треугольник ABC — прямоугольный. **66.** Треугольник равнобедренный. **68.** Стороны треугольника будут c, 1,5 c и 2 c. Использовать выражение площади треугольника по формуле Герона и по формуле $S=\frac{1}{2}ab\sin C$. **69.** Обозначим сторону ромба через a, диагонали ромба $2x$ и $2y$, а острый угол его через 2α. Тогда периметр ромба будет $4a$, сумма диагоналей — $l=2a(\sin\alpha+\cos\alpha)$. По условию $4a=1{,}5l$. Значит, $4a=3a(\sin\alpha+\cos\alpha)$ Отсюда $2\alpha=\arcsin\frac{7}{9}$. **73.** Вычесть первое равенство из второго. **74.** Умножить правые части первых двух равенств соответственно на $\sin^2 x+\cos^2 x$ и $\sin^2 y+\cos^2 y$, затем почленно разделить их соответственно на $\cos^2 x$ и $\cos^2 y$. **75.** Данное в задаче равенство приводится к системе равенств $\operatorname{tg}B=2\operatorname{tg}A$, $\operatorname{tg}C=3\operatorname{tg}A$. Далее $\operatorname{tg}C=-\operatorname{tg}(A+B)$. **76.** Максимум будет при равенстве сумм противолежащих углов. **77.** 1) 0. 2) 0. 3) $\frac{n+1}{2}-\frac{\sin(n+1)b\cdot\cos(2a-nb)}{2\sin a}$. 4) $\frac{n+1}{2}+\frac{\sin(n+1)b\cdot\cos(2a-nb)}{2\sin a}$. 5) $\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\cdot\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$. **78.** 1) π. 2) 2π 3) 2π. 4) π. 6) 2π. 7) π. 8) π. 9) 2π. **79.** Да.

§ 3.

1. $\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $\frac{\pi k}{2}+(-1)^k\cdot\frac{\arcsin(2\sqrt{2}-2)}{2}$. **3.** $\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **4.** Воспользоваться выражением для $\cos 4x$ через $\sin x$. **5.** Представить левую часть уравнения в виде $(\sin x-1)^5$. **6.** $\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **7.** $60^\circ(3k+1)$. **8.** $\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **9.** $\frac{k\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{24}$; $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **10.** Представим левую часть уравнения так: $\sin^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x-2\cdot\sin 2x=0$. Или $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2+\frac{1}{4}\sin^2 2x-2\sin 2x=0$. **11.** $k\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{7}$.

12. $\frac{\pi}{4}(4k+1)+(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}$. **13.** $\frac{k\pi}{4}$; $\frac{(2k+1)\pi}{6}$. **14.** $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **15.** $k\pi+\frac{\pi}{4}$; $k\pi+\operatorname{arc\,tg}(-2)$. Воспользоваться формулами для $\sin 3x$ и $\cos 3x$. **18.** Введём обозначения $\sin^2(30^\circ-x)=y$; $\cos^2(30^\circ-x)=z$. Тогда уравнение сведётся к системам уравнений:

1) $\begin{cases}yz=0\\y+z=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}yz=1\\y+z=1.\end{cases}$

Первая система дает $x_1 = 30°\,(6k - 1)$; $x_2 = 60°\,(3k - 1)$, вторая система действительных решений не имеет. **22.** $\pi\,(2k + 1)$; $k\pi - \frac{\pi}{4}$. **23.** $\frac{\pi}{24}\,(12k + 1)$; $\frac{\pi}{24}\,(12k + 5)$. **24.** $\frac{\pi}{4}\,(4k + 1)$; $k\pi + \operatorname{arc\,tg}\,3$. **25.** Ввести обозначение $\sin x + \cos x = U$. Тогда $\sin 2x = U^2 - 1$. **26.** Привести данное уравнение к однородному путём разложения $\sin x$ и $\cos x$ по формулам двойного аргумента. **27.** $\sin(\pi \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right)$. Воспользоваться теперь условиями равенства синусов:

$$1)\ \pi \cos x + \frac{\pi}{2} - \pi \sin x = (2k + 1)\,\pi,$$

$$2)\ \pi \cos x - \left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right) = 2k\pi.$$

28. Воспользоваться формулами перехода от произведения фуикций к их сумме. **29.** Заменить $\sqrt{3}$ через $\operatorname{tg} 60°$. **31.** $\sqrt{\frac{a}{b}}$. **32.** $a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2}$; $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$. **33.** $\frac{b\sqrt{1 - a^2} + a\sqrt{1 - b^2}}{ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}}$; $|a| \leqslant 1, |b| \leqslant 1$. **34.** $1 \pm \sqrt{2}$. **35.** 0; -1. **36.** 1. **37.** Разделить обе части уравнения на $\cos(\pi \operatorname{arc\,tg} x)$. Тогда $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{arc\,tg} x) = 1$, $\pi \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$; $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{4k + 1}{4}$; $-\frac{\pi}{2} < \frac{4k + 1}{4} < \frac{\pi}{2}$; $k = -1;\ 0;\ 1$. **38.** $\pi\,(\operatorname{arc\,tg} x)^2 = \pi k + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$; $(\operatorname{arc\,tg} x)^2 = k + (-1)^k \cdot \frac{1}{6} < \frac{\pi^2}{4}$. **39.** $5\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$; $k = -1;\ 0;\ 1$. **40.** Воспользоваться равенством $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$

41. 0. **42.** 0. **43.** 2. **44.** 1. **45.** $\frac{2}{5}$. **46.** $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$. **47.** $\sqrt{3} + 1$. **48.** 0. **49.** $1 \pm \sqrt{5}$. **50.** Взять синус от обеих частей равенства: $\operatorname{arc\,sin}(1 - \cos x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$. **51.** 1.

§ 4.

1. Переписать неравенство в виде:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 a}{2} \geqslant 1$$

и учесть, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического. При $a = b = c = 30°$ — знак равенства. **3.** Воспользоваться формулами перехода от суммы функций к произведению. **8.** 1) Левую часть неравенства разложить на множители: $(\cos x - 3)(2\cos x - 1)$. **9.** Разложить левую часть неравенства на миожители, как сумму кубов.

10. Представить $\frac{\sin(k+1)x}{x} = \frac{\sin kx \cdot \cos x}{x} + \frac{\cos kx \cdot \sin x}{x}$. **14.** Данное неравенство можно заменить равносильным:

$$(a \sin x + b \cos x)^2 \leqslant a^2 + b^2 .$$

Раскрыв скобки и сгруппировав: $a^2(1 - \sin^2 x) + b^2(1 - \cos^2 x) - 2ab \sin x \cdot \cos x \geqslant 0$ или $(b \sin x - a \cos x)^2 \geqslant 0$. **15.** 1) $2k < x < 2k + 1$, k — любое целое число. 2) $2k - \frac{1}{2} < x < 2k + \frac{1}{2}$, k — любое целое число. 3) Неравенство сводится к неравенствам $\operatorname{tg} x < -1$ и $0 < \operatorname{tg} x < 1$. 4) Неравенство сводится к неравенствам $\operatorname{tg} x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg} x < 1$.

5) $4k < \frac{1}{x} < 4k + 3$, k — любое целое. **6.** $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$ и $\frac{1}{2} < \cos x < 1$.

7) $|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Взять синус от обеих частей неравенства. 8) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant |\sin x| \leqslant 1$. 9) $\cos a + \cos(2x + a) > \cos a - \cos(2x + a)$, $\cos(2x + a) > 0$. 10) Сводится к неравенству $\operatorname{tg} x > 1$. 11) $\frac{1}{2} < \cos x \leqslant 1$. 12) Неравенство сводится к системам неравенств: $4k - 1 < x(x+1) < 4k + 1$, $4m < x(x-1) < 4m+2$ и $4k + 1 < x(x+1) < 4k + 3$, $4m - 2 < x(x-1) < 4m$ где k и m принимают целые значения.

§ 5.

1) Система сводится к следующей линейной системе:

$$x + y = \frac{\pi}{2}(4k + 1),$$

$$x - y = \frac{\pi}{2}(2m + 1).$$

(k и m — целые числа). 2) Можно показать, что $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$. Разделив и умножив почленно уравнения системы, получится:

$$\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} y, \quad \sin^3 2x = \sin 2y .$$

Дальше заменить $\sin 2x$ и $\sin 2y$ через $\operatorname{tg} x = U$ и $\operatorname{tg} y = V$ по формулам

$$\sin 2x = \frac{2U}{1 + U^2}, \quad \sin 2y = \frac{2V}{1 + V^2} .$$

3) Обозначив $\cos^2 x = U$, $\cos^2 y = V$, получится система:

$$U + V = 2 - a,$$

$$UV = \frac{2-a}{2+b}, \qquad (0 < a < 2, \ b \geqslant 0).$$

4) Первое уравнение равносильно уравнению: $2\cos(x + y)\cos(x - y) = \frac{1}{2}$.

Дальше, заменив $2\cos(x+y)$ числом $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, получим $\cos(x-y) = -\cos 15^0$. 5) Система приводится к системе:

$$\cos(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6) См. № 5 7) См № 6). 8) См. № 2)

§ 6

1. $\cos B = \sin A$, $y = \frac{1}{2}\sin 2A$, $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$. **2.** 1) Обозначить:

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = Z, \quad Z^2 = 8(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C),$$

$$Z^2 \leqslant \left(\frac{2-2\cos A+2-2\cos A+2-2\cos C}{3}\right)^3; \quad 27Z^2 \leqslant (4-Z)^3.$$

$(Z-1)(Z^2+16Z+64) \leqslant 0$; Так как $Z^2+16Z+64>0$, получаем $Z \leqslant 1$, $Z_{\text{наиб.}} = 1$. 2) Воспользоваться тождеством:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$$

и неравенством Коши-Буняковского. Наименьшее значение $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$ равно 1. **3.** 1) $2y = \cos a - \cos(2x+a)$. $y_{\text{наим.}} = \frac{\cos a - 1}{2} = -\sin^2\frac{a}{2}$; $y_{\text{наиб.}} = \frac{\cos a + 1}{2} = \cos^2\frac{a}{2}$. 2) $2y = \sin a + \sin(2x-a)$ $y_{\text{наим.}} = \frac{\sin a - 1}{2}$; $y_{\text{наиб}} = \frac{\sin a + 1}{2}$. 3) Функция $y = a\sin\alpha + b\cos\alpha$ имеет крайние значения $-\sqrt{a^2+b^2}$ и $+\sqrt{a^2+b^2}$. $y_{\text{наим.}} = -2$, $y_{\text{наиб.}} = 2$. 4) $y_{\text{наим.}} = -1,5$. 5) $2y = (a-c)\cos 2x + b\sin 2x + a + c = Z + a + c$; $-\sqrt{(a-c)^2+b^2} \leqslant Z \leqslant \sqrt{(a-c)^2+b^2}$. 6) Рассмотреть дискриминант уравнения: $a\operatorname{tg}^4 x - (a+b-2y)\operatorname{tg}^2 x + b = 0$. Получается: если $a>0$, $b>0$, то: $y_{\text{наиб.}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$; если $a<0$, $b<0$, то $y_{\text{наим}} = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2}$. 7) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{y-1}{y+1}$ или $\cos 2x = -\frac{1}{y}$; $-1 \leqslant -\frac{1}{y} \leqslant 1$. Найденные отсюда: $y \geqslant 1$ и $y \leqslant -1$ для y никаких крайних значений не дают, так как при $y=1$: $\operatorname{tg} x = 0$, а $\operatorname{ctg} x$ не существует при $y=-1$ $\operatorname{tg} x$ не существует.

4. $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = 3:1$; $\sin(x-y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$. С возрастанием угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$ синус возрастает. Поэтому при $\sin(x+y)=1$, т. е. при $x+y=\frac{\pi}{2}$ получается наибольшее значение $z = \frac{\pi}{6}$. **5.** См. последний

пример § 17 главы второй. **6.** Если $a > 0$, $b > 0$, то $y_{\text{наим.}} = 2\sqrt{ab}$; если $a < 0$, $b < 0$, то $y_{\text{наиб.}} = -2\sqrt{ab}$. **7.** 1) Наибольшее из отрицательных значений равно $-2\sqrt{ab}$, наименьшее из положительных значений равно $2\sqrt{ab}$. 2) Ответ такой же, как в 1). **8.** $z = 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right)$.

$$z \leqslant 2\sin\frac{x+y}{2}\left(1 + \cos\frac{x+y}{2}\right).$$ Знак равенства при $y = x$.

$$z \leqslant 8\sin\frac{x+y}{4}\cos^3\frac{x+y}{4} = 8\left(\sin^2\frac{x+y}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos^2\frac{x+y}{4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Наибольшее значение получается при $x = y = 60°$. **9.** Использовать неравенство:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$$

и формулы:

$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2}, \quad r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Наименьшее значение k равно 1. **10.** Угол C задан. Обозначим: $90° - \frac{C}{2} = \alpha$, $A = \alpha + x$, $B = \alpha - x$. Имеем: α — острый угол, $0 \leqslant x < \alpha$. Отсюда $\cos x > \cos\alpha$. При $x = 0$; $y = \frac{2}{\sin\alpha}$. Можно показать, что

$$y = \frac{\sin(\alpha + x) + \sin(\alpha - x)}{\sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x)} = \frac{4\sin\alpha\cos x}{2(\cos^2 x - \cos^2\alpha)} \geqslant \frac{2}{\sin\alpha}. \quad y_{\text{наим.}} = \frac{2}{\sin\alpha}.$$

11. Использовать тождество для углов треугольника:

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$u = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$. $u_{\text{наиб.}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. (см. № 19).

12. Пусть $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2 \cdot z$. По теореме синусов имеем:

$$z = 2 - \cos(A - B)\cos(A + B) - \cos^2(A + B) = -\cos^2 C + \\ + \cos(A - B)\cos C + 2.$$

Дискримиант этого уравнения неотрицателен:

$$\cos^2(A - B) - 4z + 8 \geqslant 0.$$

Отсюда $z \leqslant 2 + \frac{1}{2}\cos^2(A - B)$. При $A = B$, $z_{\text{наиб.}} = \frac{3}{2}$. Равенство других углов доказывается аналогично. Треугольник правильный. **13.** Использовать теорему синусов и формулу $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$. При $A = B = C$ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ достигает наименьшего значения, а $\sin A\sin B\sin C$ — наибольшего значения. $k_{\text{наим.}} = 4\sqrt{3}$. **14.** 1) $\sin^2 x = \frac{y-b}{a-b}$; если $a < b$, то $a \leqslant y \leqslant b$, если $a > b$, то $b \leqslant y \leqslant a$. 2) Рассмотрим квадратный трёх-

член: $y = b\cos^4 x - a\cos^2 x + a$. Если $b > 0$, то $y_{\text{наим.}} = a - \frac{a^2}{4b}$; если $b < 0$, то $y_{\text{наиб.}} = a - \frac{a^2}{4b}$.

3) Рассмотреть квадратный трёхчлен:

$$y = (a + b + c)\sin^4 x - (b + 2c)\sin^2 x + c.$$

Необходимые условия: если $a + b + c > 0$, то $b + 2c > 0$, $2a + b \geqslant 0$; если $a + b + c < 0$, то $b + 2c < 0$, $2a + b \leqslant 0$; если $b + 2c = 0$, то $y = c$

4) Рассмотреть квадратный трёхчлен: $y = (a + b)\sin^4 x - 2b\sin^2 x + b$. Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $y_{\text{наим.}} = \frac{ab}{a+b}$; если $a < 0$ и $b < 0$, то $y_{\text{наиб.}} = \frac{ab}{a+b}$. **15.** $y = 8c\cos^4\frac{x}{2} + 2(b - 4c)\cos^2\frac{x}{2} + a - b + c \geqslant 0$ при любых x. Отсюда прежде всего получаем: $c \geqslant b - a$ или $\frac{c}{b-a} \geqslant 1$. Потом требуем, чтобы дискриминант $D = 4(b - 4c)^2 - 32(a - b + c)c$ был неположителен: $D \leqslant 0$. Это условие даёт неравенство: $8c^2 - 8ac + b^2 \leqslant 0$, справедливое при условии: $\frac{2a - \sqrt{4a^2 - 2b^2}}{4} \leqslant c \leqslant \frac{2a + \sqrt{4a^2 - 2b^2}}{4}$ при $b \leqslant a\sqrt{2}$. Рассмотрим теперь интересующее нас отношение:

$$k = \frac{a + b + c}{b - a} = 1 + \frac{c}{b-a} + \frac{2a}{b-a} \geqslant 1 + 1 + 2(\sqrt{2} + 1) = 2(2 + \sqrt{2}).$$

Наименьшее значение k равно $2(2 + \sqrt{2})$. **16.** 1) $\sin x = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$; 2) $\sin x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$; 3) $\cos x = \frac{-1 + y^2}{1 + y^2}$; 4) $\cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$; y может принимать любые вещественные значения. **17.** $D = y^4 - y^2(a^2 - b^2) \geqslant 0$, $y^2 \geqslant a^2 - b^2$ для обеих функций. Наименьшее из положительных значений и наибольшее из отрицательных значений соответственно равны $\sqrt{a^2 - b^2}$ и $-\sqrt{a^2 - b^2}$. **18.** Сначала доказать, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность и имеющих общее основание, наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник. Потом взять произвольный равнобедренный треугольник ABC, вписанный в данную окружность; через вершину C провести диаметр CD и концы этого диаметра соединить с A и B. Если в четырёхугольнике $ABCD$ обозначить $\angle ADB$ через 4α, то для периметра треугольника получится выражение: $U = 2\sin 4\alpha + 4\sin 2\alpha$ (радиус окружности приняли за единицу). После преобразований придём к выражению:

$$U = 16\sin\alpha\cos^3\alpha = 16(\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}(\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Наибольшее значение U получается при $\alpha = 30°$ или $4\alpha = 120°$, т. е. для равностороннего треугольника. **19.** 1) Применить тождество:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

потом использовать задачу № 2. $y_{\text{наиб.}} = \frac{3}{2}$. 2) Использовать теорему синусов и задачу № 18. $y_{\text{наиб.}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 3) Использовать тождество:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$y_{\text{наиб.}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. 4) Из суммы положительных слагаемых:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

заключаем, что произведение их достигает наибольшего значения, если

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

т. е. $A = B = C = 60°$. $y_{\text{наиб.}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$. 5) $y_{\text{наиб.}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. 6) $2y = 1 - \cos A + 1 - \cos B + 1 - \cos C = 3 - (\cos A + \cos B + \cos C)$. $y_{\text{наим.}} = \frac{3}{4}$.

$$7)\ y = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 4 \sin A \sin B \sin C =$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \geqslant 0 \text{ (см. № 2)}.$$

$y_{\text{наим}} = 0$. Достигается при $A = B = C = 60°$. **20.** 1) $\cos^2 x = \frac{a+b}{y+b}$;

2) $\sin^2 x = \frac{a+b}{y+b}$. Из неравенств: $0 < \frac{a+b}{y+b} \leqslant 1$ находим $y \geqslant a$, если $a + b > 0$ и $y \leqslant a$, если $a + b < 0$.

§ 7.

1. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 15',5$ *см.* **2.** Задача неопределённа. **3.** $2 \operatorname{arc tg} (2 \pm \sqrt{3})$.

4. $\frac{R^2}{2}\left(\arcsin \frac{a}{2R} + \arcsin \frac{a}{2r}\right) - a \frac{\sqrt{4R^2 - a^2} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}}{4}$. **5.** Использовать выражения для биссектрисы и медианы треугольника:

$$\delta_A = \frac{2R \cdot \sin B \cdot \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}} \text{ и } m_a = R\sqrt{2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A}.$$

6. Выражение для площади трапеции будет иметь вид:

$S = 4a^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Записав его в виде $S = 4a^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \times$

$\times \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, можно воспользоваться условием $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$.

7. $2 \arcsin \frac{a}{2R}$. **8.** $\arccos \frac{m^2 - 2a^2}{m^2}$. **9.** $2p = \frac{2 \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + 2\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{4}}$, где β — угол, прилежащий к стороне BC Наибольшее значение периметр будет иметь, если треугольник равнобедренный. **10.** Сумма хорд, образующих данный вписанный угол, будет наибольшей, если эти хорды равны между собой. **11.** $\frac{\pi l^3}{54}$ **12.** $\arccos \frac{\alpha}{360}$. **13.** $\frac{\pi}{6} l^3 \sin^3 2\alpha$.

Бугулов Ельмурза Арзамович
Толасов Батраз Андреевич

Сборник задач для подготонки к математическим олимпиадам

Редактор Х. Х. Мелнков

Обл. худож. У. К. Канукова
Технический редактор А. А. Дзгоев
Корректоры Г. Я. Лазарева,
В. Т. Сырхаева

Сдано в набор 30-XI-1961 г. Подписано к печати 20-IX-1962 г. Формат бум. $60\times92^1/_{16}$. Печат. листов 14.25. Учетно-изд. листов 11,37.
Заказ № 1790. Изд. № 123. Тираж 2000.
Цена 41 к.

Северо-Осетинское книжное издательство,
г. Орджоникидзе, ул. Гражданская, 2.

Республиканская книжная типография,
г Орджоникидзе, ул. Джанаева, 20.